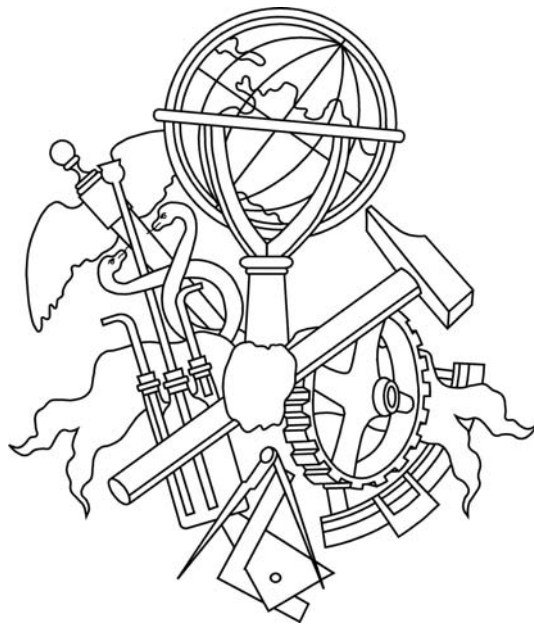


SINAIS E SISTEMAS



Alexandra Maria Soares Ferreira Galhano

**Grupo de Disciplinas de Electrónica e Telecomunicações
Área Científica de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto
Instituto Politécnico do Porto**

2003

Índice

Sinais	1
Introdução	1
Classificação de sinais	1
Sinais determinísticos e aleatórios	1
Sinais contínuos e discretos	2
Sinais reais e complexos	2
Sinais periódicos e aperiódicos	3
Sinais pares e ímpares	5
Simetria hermitiana para sinais complexos	6
Causalidade	6
Energia e potência	7
Alguns sinais importantes e suas propriedades	8
Sinal sinusoidal	8
Sinal exponencial complexa	8
Sinal exponencial real	8
Impulso rectangular	9
Sinal triangular	9
Sinal seno cardinal	9
Sinal ‘sinal’ ou <i>signum</i>	10
Funções singulares	10
Degrau unitário ou de Heaviside	10
Impulso unitário ou de Dirac	13
Problemas	16
Sistemas	19
Introdução	19
Representação de sistemas	19
Classificação de sistemas	20
Sistemas contínuos e discretos	20
Sistemas lineares e não lineares	21
Sistemas invariantes no tempo e variantes no tempo	21
Sistemas com memória e sem memória	22
Sistemas causais e não causais	22
Sistemas estáveis	23
O integral de convolução para sistemas lineares e invariantes no tempo	23
Resposta em degrau	25
Cálculo do integral de convolução	25
Conceitos de memória e função peso	29
Sistemas descritos por equações diferenciais	30
Funções próprias dos SLIT contínuos	32
Problemas	32
Série de Fourier	35
Introdução	35

Espaços de sinais	35
Série de Fourier e suas propriedades	36
Simetria dos coeficientes da série de Fourier	38
Série de Fourier trigonométrica	39
Expansão de sinais reais pares e ímpares	40
Expansão de sinais harmônicos pares e ímpares	41
Outras propriedades da série de Fourier	42
Linearidade	42
Translação nos tempos	43
Mudança de escala no tempo	43
Inversão do tempo	44
Multiplicação	44
Relação de Parseval	44
Resposta de SLIT a sinais periódicos	45
Série truncada	48
O fenómeno de Gibbs	49
Problemas com condições fronteira	50
Problemas	52
 Transformada de Fourier	 57
Introdução	57
Da série à transformada de Fourier	57
Propriedades da transformada de Fourier	60
Linearidade	60
Translação nos tempos	60
Conjugação	61
Diferenciação e integração	62
Mudança de escala no tempo	63
Dualidade	64
Diferenciação nas frequências	64
Modulação ou translação nas frequências	64
Convolução	65
Multiplicação	66
Relação de Parseval	66
Teorema de Rayleigh	67
Autocorrelação	67
Momentos	67
Transformada de Fourier de sinais periódicos	68
Passagem por SLIT	70
Filtros ideais	71
Largura de banda e tempo de subida	72
Problemas	74
 Transformada de Laplace	 77
Introdução	77
Da transformada de Fourier à de Laplace	77
Região de convergência da transformada de Laplace – ROC	78
Pólos e zeros	80

Propriedades da região de convergência	81
Propriedades da transformada de Laplace	83
Linearidade	83
Translação nos tempos	84
Translação no domínio dos complexos	84
Mudança de escala nos tempos	85
Inversão nos tempos	87
Conjugação	87
Convolução	87
Diferenciação nos tempos	88
Integração nos tempos	89
Diferenciação nos complexos	89
Teoremas do valor inicial e do valor final	90
A transformada inversa de Laplace	91
Desenvolvimento em frações parciais	93
A transformada unilateral de Laplace	94
Propriedades da transformada de Laplace unilateral	96
Diferenciação nos tempos	96
Integração nos tempos	98
Problemas	102
Aplicações da transformada de Laplace	103
Introdução	103
Função de transferência	103
Função de transferência de SLIT descritos por equações diferenciais	
lineares de coeficientes constantes	104
Causalidade	106
Estabilidade	107
Diagramas de blocos	108
Resposta em frequência e gráfico de Bode	110
Pólos e zeros reais e simples	110
Pólos e zeros complexos	115
Análise de circuitos com a transformada de Laplace	120
Resistência	120
Indutância	120
Capacidade	121
Indutância mútua	122
Problemas	125

Sinais

Introdução

Neste capítulo é feita a modelização matemática do estudo de sinais, primeiro através da sua classificação e caracterização de propriedades e, posteriormente, evidenciando um conjunto de sinais de utilização corrente através da suas descrições analíticas e gráficas.

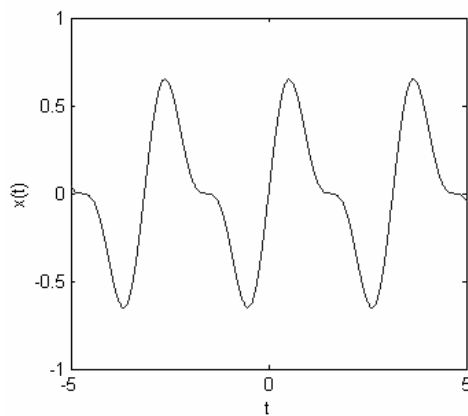
Classificação de sinais

Um sinal é modelizado por uma função, $x(t)$ ou $f(t)$, que transporta informação. Vamos analisar e classificar os sinais, de uma forma generalista, evidenciando algumas das suas propriedades.

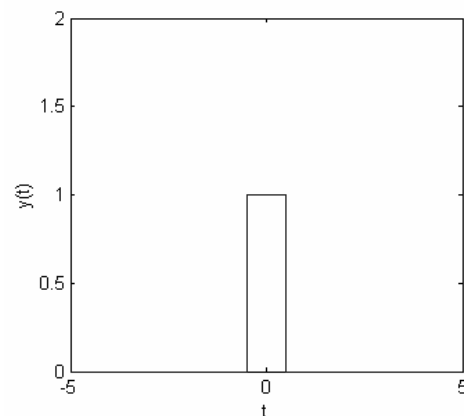
Sinais determinísticos e aleatórios

Os sinais determinísticos são completamente modelizados por uma função do tempo. Como exemplo podemos considerar

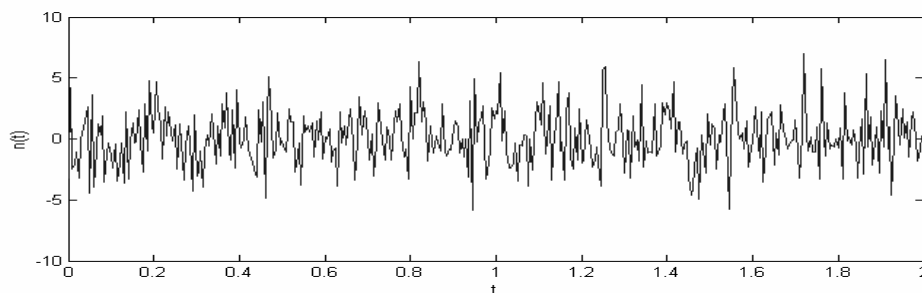
$$x(t) = \cos^2(t) \sin(2t), \quad -\infty < t < \infty$$



a) Sinal $x(t) = \cos^2(t) \sin(2t)$



b) Sinal impulso unitário



c) Sinal aleatório

Figura 1. Representação gráfica de dois sinais determinísticos e de um sinal aleatório.

que é uma função contínua do tempo e está representado na Figura 1.a), mas também

$$y(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

que não é uma função contínua do tempo e está representado na Figura 1.b).

Os sinais aleatórios ou estocásticos, em cada instante de tempo t , são descritos por uma variável aleatória e são definidos em termos da sua função densidade de probabilidade. Um exemplo está representado na Figura 1.c). Nesta disciplina apenas estudamos sinais determinísticos.

Sinais contínuos e discretos

Um sinal é contínuo quando é representado por uma função, $x(t)$, cuja variável independente t toma valores reais, *i.e.* $t \in \mathbb{R}$. Todos os exemplos da Figura 1. são representações de sinais contínuos.

Um sinal é discreto quando é representado por uma função, $x[n]$, cuja variável independente n toma valores inteiros, *i.e.* $n \in \mathbb{Z}$. A Figura 2 mostra um exemplo de um sinal discreto.

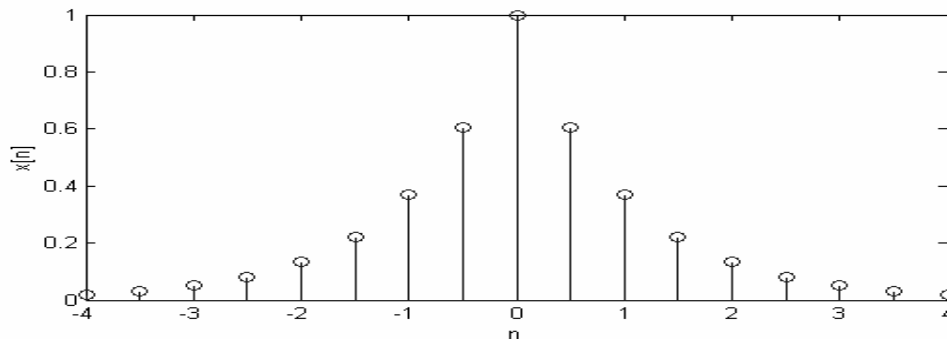


Figura 2. Sinal discreto.

Por amostragem de um sinal contínuo, $x(t)$, em instantes de tempo igualmente espaçados de um intervalo T_a obtém-se um sinal discreto, sendo $x[n] = x(t + nT_a)$

Sinais reais e complexos

Um sinal real toma valores no conjunto dos números reais, $x(t) \in \mathbb{R}$ ou $x[n] \in \mathbb{R}$

Um sinal complexo toma valores no conjunto dos números complexos, $x(t) \in \mathbb{C}$ ou $x[n] \in \mathbb{C}$ e requer sempre duas informações, módulo e fase ou parte real e parte imaginária.

Exemplo 1.

O sinal $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$ é um sinal complexo cujas partes real e imaginária, representadas na figura 3, são, respectivamente,

$$x_r(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$x_i(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

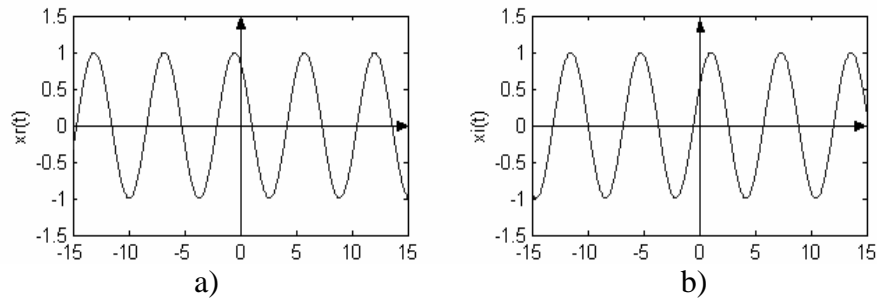


Figura 3. Partes real (a) e imaginária (b) de $x(t)$ com $A = 1$

A sua descrição em módulo e fase, representada na figura 4, é

$$|x(t)| = A$$

$$\angle x(t) = 2\pi f_0 t + \theta$$

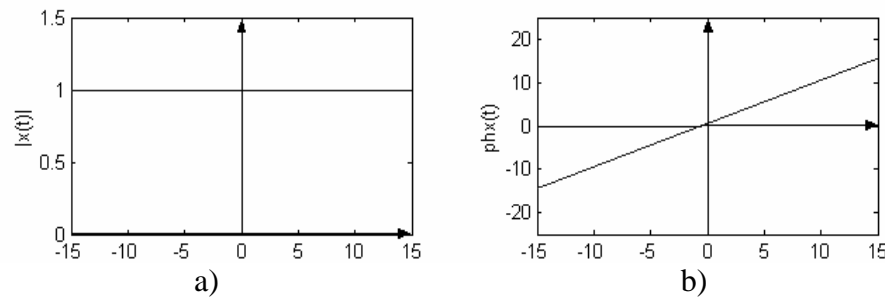


Figura 4. Módulo (a) e fase (b) de $x(t)$ com $A = 1$

As componentes real e imaginária, e o módulo e fase de um sinal $x(t)$ complexo são dados por

$$x_r(t) = |x(t)| \cos(\angle x(t))$$

$$x_i(t) = |x(t)| \sin(\angle x(t))$$

$$\angle x(t) = \arctan \frac{x_i(t)}{x_r(t)}$$

Sinais periódicos e aperiódicos

Um sinal contínuo é periódico quando se verifica a relação

$$x(t) = x(t + kT_0), \quad \forall t$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ e T_0 , o menor valor positivo que satisfaz a relação anterior, é seu período fundamental. Para um sinal constante (*dc*) o período fundamental é indeterminado, pelo que qualquer valor de T_0 é satisfatório. Um sinal composto pela combinação linear de sinais contínuos e periódicos nem sempre é um sinal periódico.

Exemplo 2.

Considere os sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$, periódicos com períodos fundamentais T_1 e T_2 , respectivamente. Indique as condições em que o sinal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ é periódico e obtenha o seu período fundamental.

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são periódicos com períodos fundamentais T_1 e T_2 então

$$x_1(t) = x_1(t + kT_1)$$

$$x_2(t) = x_2(t + mT_2)$$

$$x(t) = x_1(t + kT_1) + x_2(t + mT_2)$$

com $k, m \in \mathbb{Z}$, i.e. são inteiros positivos. Para que $x(t)$ seja periódico, com período T , também

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t + T) = x_1(t + T) + x_2(t + T) \\ &= x_1(t + kT_1) + x_2(t + mT_2) \end{aligned}$$

Pelo que

$$kT_1 = mT_2 = T$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{k}$$

Então para $x(t)$ ser periódico é necessário que $T_1/T_2 \in \mathbb{Q}$, i.e. seja um número racional. Se T_1/T_2 for um número irracional então $x_1(t)$ e $x_2(t)$ não têm um período comum e, portanto $x(t)$ não é periódico.

Um sinal discreto (ou sequência) é periódico quando se verifica a relação

$$x[n] = x[n + kN_0], \forall n$$

onde $n, k, N_0 \in \mathbb{Z}$ e N_0 é seu o período fundamental. Um sinal composto pela combinação linear de sinais discretos e periódicos é sempre periódico, mas uma sequência obtida por amostragem de um sinal contínuo e periódico nem sempre é periódica.

Um sinal aperiódico não satisfaz as condições de periodicidade.

Exemplo 3.

Considere o sinal $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, com frequência angular ω_0 e período fundamental $T_0 = 2\pi/\omega_0$ a partir do qual se obtém por amostragem uma sequência discreta $x[n]$, sendo o período de amostragem T_a . Obtenha a condição a satisfazer por T_a para que o sinal $x[n]$ seja periódico.

Para o sinal $x[n] = x(nT_a) = e^{j\omega_0 nT_a}$ ser periódico tem de satisfazer a condição

$$e^{j\omega_0 (n+N_0)T_a} = e^{j\omega_0 nT_a} e^{j\omega_0 N_0 T_a} = e^{j\omega_0 nT_a}$$

Ou seja

$$e^{j\omega_0 N_0 T_a} = 1 \Rightarrow \omega_0 N_0 T_a = m2\pi$$

$$\frac{2\pi}{T_0} N_0 T_a = m2\pi$$

$$\frac{T_a}{T_0} = \frac{m}{N_0}$$

onde m é um inteiro positivo. Então, para $x[n]$ ser periódico é necessário que $T_a/T_0 \in \mathbb{Q}$, *i.e.* seja um número racional.

Sinais pares e ímpares

Um sinal $x(t)$ ou $x[n]$ é um sinal par ou com simetria par se

$$x(-t) = x(t)$$

$$x[-n] = x[n]$$

Um sinal $x(t)$ ou $x[n]$ é um sinal ímpar ou com simetria ímpar se

$$x(-t) = -x(t)$$

$$x[-n] = -x[n]$$

Qualquer sinal $x(t)$ ou $x[n]$ pode ser expresso como a soma de dois sinais, um par e um ímpar, *i.e.*

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

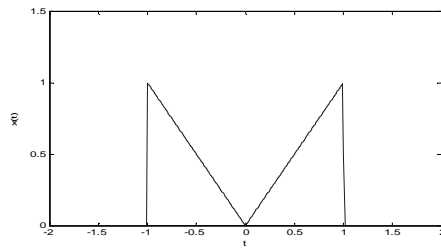
$$x[n] = x_p[n] + x_i[n]$$

com

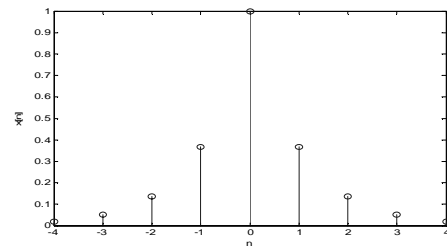
$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}; \quad x_p[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}; \quad x_i[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

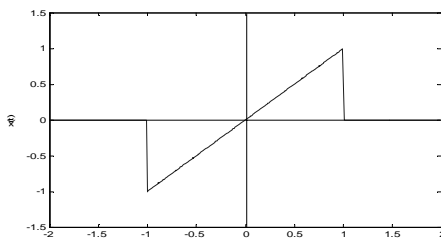
Exemplos de sinais pares e ímpares estão indicados na Figura 5.



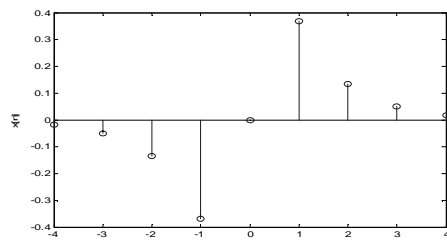
a)



b)



c)



d)

Figura 5. Sinais pares a) e b) e sinais ímpares c) e d)

Simetria hermitiana para sinais complexos

Um sinal complexo é hermitiano ou tem simetria hermitiana se a sua parte real for par e a sua parte imaginária for ímpar. Alternativamente pode dizer-se que o módulo de um sinal hermitiano é par e a fase é ímpar.

Causalidade

Um sinal $x(t)$ ou $x[n]$ é causal se

$$x(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

$$x[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

Um sinal $x(t)$ ou $x[n]$ é anticausal se

$$x(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$x[n] = 0 \quad \forall n > 0$$

Um sinal $x(t)$ ou $x[n]$ não é causal se nenhuma das relações anteriores for satisfeita. Na figura 6 estão representados exemplos destes sinais.

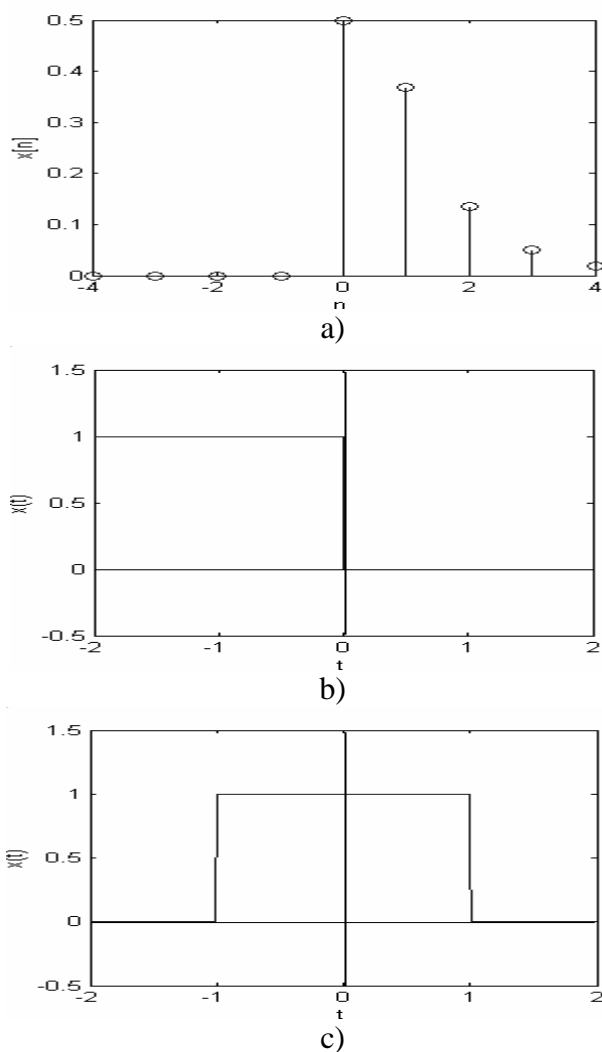


Figura 6. Sinais: a) causal; b) anticausal; c) não causal.

Energia e potência

Para classificar os sinais como sinais de tipo energia ou de tipo potência vamos fazer a analogia com um circuito eléctrico.

Seja uma resistência R percorrida por uma corrente $i(t)$ e com uma diferença de potencial $v(t)$ nos seus terminais. Define-se potência instantânea por unidade de resistência, Ω , como

$$p(t) = \frac{v(t)i(t)}{R} = i^2(t)$$

Define-se energia total e valor médio da potência por unidade de Ω integrando ao longo de um intervalo de tempo $|t| \leq T/2$

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} i^2(t) dt \quad \text{J}$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i^2(t) dt \quad \text{W}$$

Analogamente, para um sinal $x(t)$ arbitrário, real ou complexo, define-se energia total normalizada como

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

e valor médio da potência normalizada como

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Com base nestas definições um sinal $x(t)$ pode ser classificado como:

- de tipo energia *sse* a sua energia for $0 < E < \infty$ e a sua potência for $P = 0$.
- de tipo potência *sse* a sua potência for $0 < P < \infty$ e a sua energia for $E = \infty$.
- nem de tipo energia nem de tipo potência quando nenhuma das relações anteriores for satisfeita.

Exemplo 4.

Considere o sinal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$. A energia deste sinal vale

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt = \infty \end{aligned}$$

onde $T = nT_0 = n/f_0$. O sinal $x(t)$ não é do tipo energia pois tem energia infinita. O valor médio da sua potência é

$$\begin{aligned}
P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT_0} \int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{A^2}{2} [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)] dt = \frac{A^2}{2} < \infty
\end{aligned}$$

O sinal $x(t)$ é de tipo potência sendo a sua potência igual ao valor médio da potência do sinal no intervalo de um período, *i.e.* $\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$.

Alguns sinais importantes e suas propriedades

Sinal sinusoidal

O sinal sinusoidal pode ter a forma $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$, onde A , f_0 e θ são a amplitude, a frequência e a fase, respectivamente. O sinal é periódico com período $T_0 = 1/f_0$. Este sinal está representado na figura 3.a).

Sinal exponencial complexa

O sinal exponencial complexa é definido por $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$ onde A , f_0 e θ são a amplitude, a frequência e a fase, respectivamente. Este sinal está representado nas figuras 3 e 4.

Sinal exponencial real,

O sinal exponencial real é definido por $x(t) = Ae^{at}$. Quando $a > 0$ a exponencial é crescente e quando $a < 0$ a exponencial é decrescente. No último caso define-se constante de tempo τ como o intervalo de tempo em que o sinal amortece para $1/e$ do seu valor na origem e $\tau = 1/|a|$.

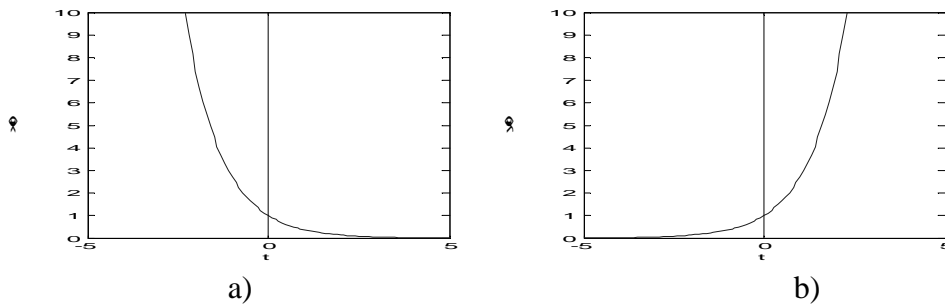


Figura 7. Sinais exponenciais reais: a) $x(t) = e^{-t}$; b) $y(t) = e^t$

Impulso rectangular

O sinal impulso rectangular é designado por $\Pi(t)$ e define-se como

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

A sua representação gráfica está na figura 1.b).

Sinal triangular

O sinal impulso rectangular é designado por $\Lambda(t)$ e define-se como

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

A sua representação gráfica está na figura 8.

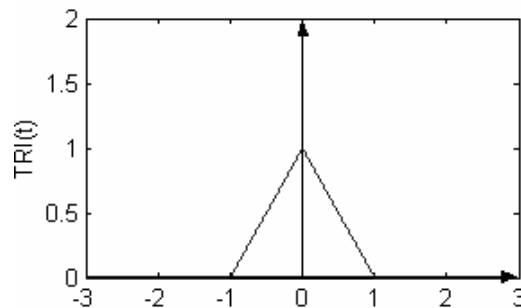


Figura 8. Sinal triangular

Sinal seno cardinal

O sinal seno cardinal é designado por $senc(t)$ e define-se como

$$senc(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Este sinal encontra-se representado na figura 9. O seu máximo ocorre em $t = 0$ e vale 1, os seus zeros ocorrem para $t = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

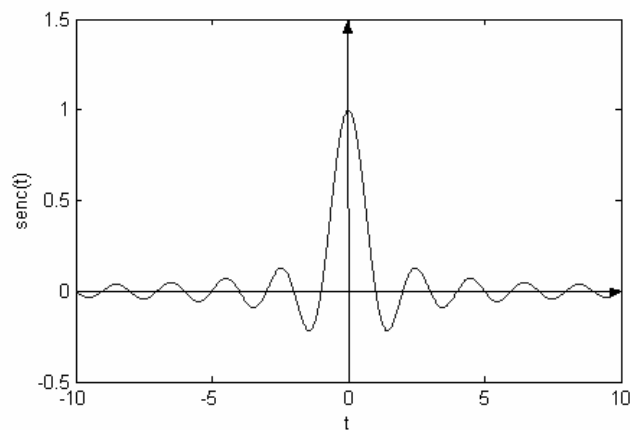


Figura 9. Sinal $senc(t)$.

Sinal ‘sinal’ ou *signum*

O sinal ‘sinal’ ou *signum* fornece o sinal da variável independente e é definido como

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

e encontra-se representado na figura 10.

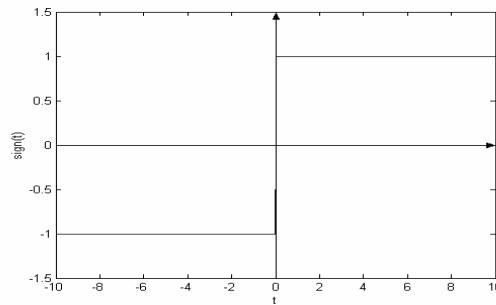


Figura 10. Sinal $\text{sign}(t)$.

Funções singulares

Degrau unitário ou de Heaviside

O degrau unitário está representado na figura 11.a) e é definido pela relação

$$u(t) = u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

As outras funções singulares podem ser obtidas a partir do degrau unitário por integrações ou derivações sucessivas.

$$u_{i-1}(t) = \int_{-\infty}^t u_i(\lambda) d\lambda \quad i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

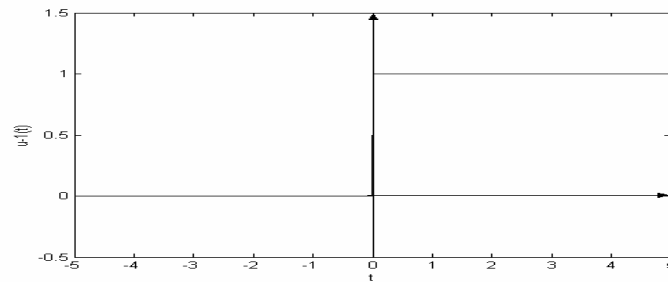
$$u_{i+1}(t) = \frac{du_i(t)}{dt}$$

Assim, integrando o degrau unitário obtém-se o sinal $u_{-2}(t)$ representado na figura 11.b) que se designa de sinal rampa unitária cuja representação analítica é

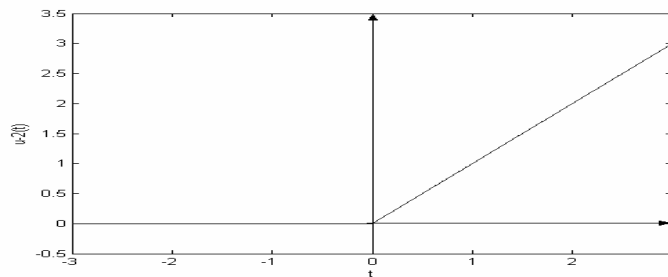
$$r(t) = u_{-2}(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Integrando a rampa unitária obtém-se o sinal $u_{-3}(t)$ representado na figura 11.c) que se designa de sinal parábola unitária cuja representação analítica é

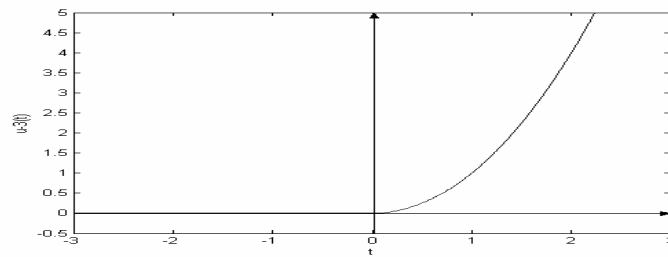
$$u_{-3}(t) = \begin{cases} t^2/2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



a) Sinal degrau unitário



b) Sinal rampa unitária



c) Sinal parábola unitária

Figura 11. Exemplo de três funções singulares

Pode-se efectuar uma translação no eixo do tempo substituindo t por $t - t_0$. Se $t_0 > 0$ o sinal aparece deslocado para a direita e diz-se atrasado, se $t_0 < 0$ o sinal aparece deslocado para a esquerda e diz-se avançado.

Exemplo 5.

Substituindo t por $t - 1/2$ no sinal degrau unitário vem

$$u\left(t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & t - \frac{1}{2} < 0 \\ 1 & t - \frac{1}{2} > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < \frac{1}{2} \\ 1 & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

O sinal impulso rectangular pode, assim, ser representado à custa de dois degraus unitários como

$$\Pi(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

ou

$$\Pi(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right)u\left(\frac{1}{2} - t\right)$$

Substituindo t por $-t$ equivale a inverter o eixo dos tempos pelo que

$$u\left(\frac{1}{2}-t\right)=u\left[-\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]=\begin{cases} 1 & t < \frac{1}{2} \\ 0 & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

É, ainda, possível efectuar uma mudança de escala no eixo dos tempos multiplicando t por uma constante, a . Se $a > 1$ o sinal vem comprimido, se $a < 1$ o sinal é expandido. De uma maneira geral, o sinal

$$x(at-b)=x\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]$$

corresponde ao sinal $x(t)$ deslocado para a direita de b/a se $b/a > 0$ ou deslocado para a esquerda de b/a se $b/a < 0$. Se $a < 0$ o sinal aparece como invertido ou reflectido pela origem segundo o eixo dos tempos. Se $|a| < 1$ o sinal aparece expandido e se $|a| > 1$ o sinal aparece comprimido.

Exemplo 6

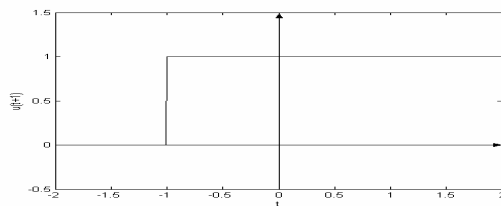
Represente graficamente os seguintes sinais

a) $x_1(t) = u(t+1)$

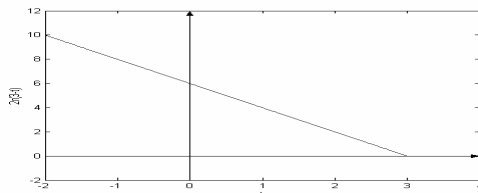
b) $x_2(t) = 2r(3-t)$

c) $x_3(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{2}\right)$

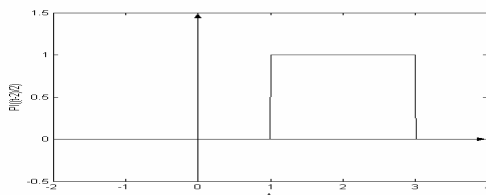
d) $x_4(t) = \Lambda(2t)$



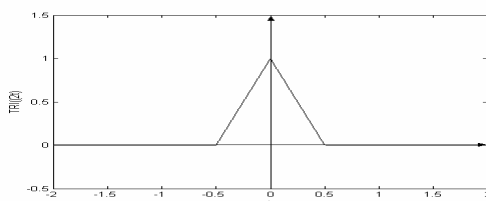
a) $x_1(t) = u(t+1)$



b) $x_2(t) = 2r(3-t)$



c) $x_3(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{2}\right)$



d) $x_4(t) = \Lambda(2t)$

Figura 12. Sinais do exemplo 6

Impulso unitário ou de Dirac

O sinal impulso unitário é uma modelização matemática que representa fenómenos físicos de muito curta duração, menor que a resolução dos instrumentos de medida apropriados, pelo que a sua duração pode ser considerada nula. Apenas são observáveis as condições anteriores e posteriores à sua ocorrência. O sinal impulso unitário, $\delta(t)$, não é uma função mas sim uma distribuição ou função generalizada. Uma distribuição é definida em termos do efeito que produz sobre outra função, designada de função teste, sob o sinal de integração. Para $\phi(t)$, uma função teste, contínua na origem, define-se impulso unitário*, $\delta(t)$, pela relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(0)$$

onde se pode ver que $\delta(t)$ é definido em termos do efeito produzido no sinal $\phi(t)$ e não em termos dos seus valores para diferentes valores de t .

É interessante visualizar $\delta(t)$ através de um processo construtivo de passagem ao limite de uma dada classe de funções quando um parâmetro tende para zero. Assim, o impulso unitário obtém-se por

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(t)$$

e $\delta_{\varepsilon}(t)$ representa uma classe de funções em que tem sempre área unitária, mesmo para valores muito pequenos de ε . Sendo a área obtida por integração do sinal em t , então, para que a área se mantenha unitária, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ vem que $\delta_{\varepsilon}(t) \rightarrow \infty$. Os exemplos mais comuns destes sinais estão a seguir representados, analítica e graficamente. Uma sequência de impulsos rectangulares na figura 13.a)

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & |t| < \varepsilon/2 \\ 0 & |t| > \varepsilon/2 \end{cases}$$

Uma sequência de funções seno cardinal na figura 13.b)

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \text{senc}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

Uma sequência de sinais triangulares na figura 13.c)

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} (1 - |t|/\varepsilon)/\varepsilon & |t| < \varepsilon \\ 0 & |t| > \varepsilon \end{cases}$$

Deste modo, o impulso unitário é, ele próprio, um sinal com área um, pelo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

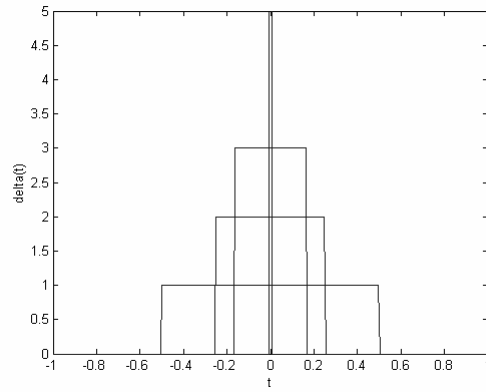
Também

$$\int_{-\infty}^t \delta_{\varepsilon}(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & t < -\varepsilon \\ 1 & t > \varepsilon \end{cases}$$

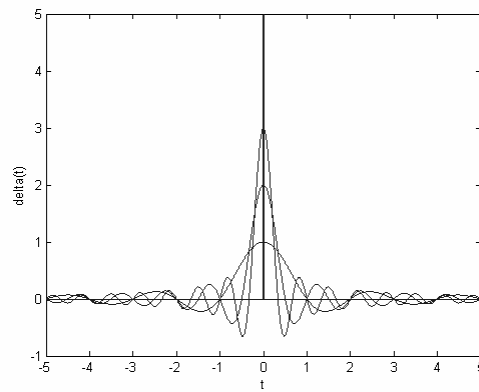
e

$$\int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda = u(t)$$

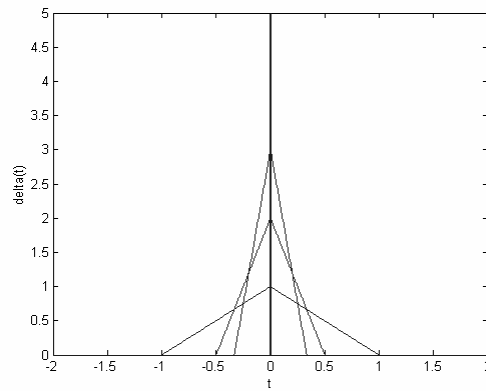
* Outras definições podem ser dadas a $\delta(t)$, embora com menor generalidade.



a) Impulsos rectangulares



b) Funções seno cardinal



c) Sinais triangulares

Figura 13. Aproximações do impulso unitário

O sinal o impulso unitário tem ainda as seguintes propriedades

1. $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$ e $\delta(0) = \infty$
2. Para $\phi(t)$ contínuo em t_0 , vem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi(t_0)$$

3. Para $\phi(t)$ contínuo em t_0 , vem

$$\int_a^b \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} \phi(t_0) & a < t_0 < b \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

4. Para $\phi(t)$ contínuo na origem, vem

$$\int_a^b \phi(t+t_0)\delta(t)dt = \begin{cases} \phi(t_0) & a < 0 < b \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

5. Para $\phi(t)$ contínuo em t_0 , vem

$$\phi(t)\delta(t-t_0) = \phi(t_0)\delta(t-t_0)$$

6. Para $a \neq 0$ vem

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

E para $a = 1$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

7. $\delta(t)$ é o elemento unitário da operação convolução

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

e

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

8. Entre o impulso unitário e o degrau unitário tem-se

$$u_{-1}(t) = u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda$$

$$u(t-t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda-t_0) d\lambda$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u_{-1}(t)$$

9. Para as derivadas generalizadas de $\delta(t)$ tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \phi(t) dt = (-1)^n \left. \frac{d^n}{dt^n} \phi(t) \right|_{t=0}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0) \phi(t) dt = (-1)^n \left. \frac{d^n}{dt^n} \phi(t) \right|_{t=t_0}$$

10. O sinal $\delta^{(n)}(t) = \begin{cases} \text{par} & n \text{ par} \\ \text{ímpar} & n \text{ ímpar} \end{cases}$.

Exemplo 7.

Considere o sinal $g(t) = Ae^{-at}u(t)$ e calcule:

a) $\frac{d}{dt} g(t)$

b) $\int_{-\infty}^t g(\lambda) d\lambda$

a) $\frac{d}{dt} g(t) = Ae^{-at}\delta(t) - Aae^{-at}u(t) = A\delta(t) - Aae^{-at}u(t)$

$$b) \int_{-\infty}^t g(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t A e^{-a\lambda} u(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{A}{a} (1 - e^{-at}) & t > 0 \end{cases} = \frac{A}{a} (1 - e^{-at}) u(t)$$

Problemas

- Considere o sinal complexo $x(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$, com $A > 0$.
 - Obtenha uma expressão para as componentes real e imaginária deste sinal.
 - Obtenha uma expressão para o módulo e a fase deste sinal.
- Obtenha as suas componentes par, $x_p(t)$, e ímpar, $x_i(t)$, dos seguintes sinais.

a) $x(t) = u(t)$	b) $x(t) = tu(t)$
c) $x(t) = t\Pi(t)$	d) $x(t) = t + 2t^2 - 3t^3$
e) $x(t) = \cos(\pi t) + \Pi(t)$	f) $x(t) = \Pi(t - 0,5)$
g) $x(t) = 1 - \cos(5t - \pi/2)$	h) $x(t) = 4\sin(3t - 30^\circ)$
i) $x(t) = e^{jt}$	j) $x(t) = e^{j10t} + e^{-j10t}$
k) $x(t) = t \operatorname{sgn}(t)$	l) $x(t) = t^2 \operatorname{sgn}(t)$
m) $x(t) = r(t)$	n) $x(t) = t r(t)$
- Considere os seguintes sinais, caracterize-os quanto à periodicidade e obtenha o seu período fundamental, T_0 .

a) $x(t) = \sin^2 2t$	b) $x(t) = \sin^2 2t + \cos^2 2t$
c) $x(t) = e^{j3t} - e^{j2t}$	d) $x(t) = 1 + \cos 4t$
e) $x(t) = 2 + \cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{6}$	f) $x(t) = \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{5}$
g) $x(t) = \cos^2(20\pi t) \sin(10\pi t)$	h) $x(t) = \begin{cases} \cos t & t < 0 \\ \sin 2t & t \geq 0 \end{cases}$
i) $x(t) = 2 \cos(10\pi t + \pi/6) + 5 \cos(17\pi t - \pi/4)$	
- O sinal $x[n] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$ com $n \in \mathbb{Z}$ é um sinal periódico com período fundamental N_0 . Obtenha a relação entre f_0 e N_0 .
- Considere o sinal sinusoidal $x(t) = \cos 15t$.
 - Obtenha o valor do período de amostragem por forma a que $x[n] = x(nT_s)$ seja uma sequência periódica.
 - Obtenha o período fundamental de $x[n] = x(nT_s)$ para $T_s = 0,1\pi$ s.
- Considere a sequência discreta $x[n] = e^{j(2\pi/3)n} + e^{j(3\pi/4)n}$. Obtenha o período deste sinal.

7. Obtenha uma expressão analítica e represente graficamente uma corrente que no instante $t = 3$ s passa de 0 A para 5 A.

8. Obtenha uma expressão analítica e represente graficamente uma corrente que no instante $t = 5$ s passa de 10 A para 0 A.

9. Obtenha uma expressão analítica para o sinal da figura P1.

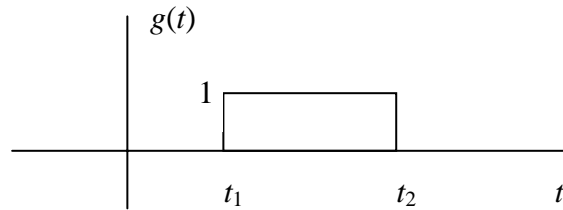


Figura P1. Gráfico do problema 9.

10. Represente graficamente os sinais:

a) $x(t) = \Pi(t/10)$

b) $x(t) = \Pi(2t - 6)$

c) $x(t) = \Lambda(t - 10)$

d) $x(t) = \Lambda(10t)$

e) $x(t) = 2u(t - 1) - 3u(t - 2) + 2u(t - 4)$

f) $x(t) = r(t) - 2r(t - 1) + 2r(t - 3) - r(t - 4)$

11. Considere $x(t) = t[u(t) - u(t - 2)]$. Represente graficamente o sinal $y(t) = x(1 - t)$.

12. Considere $x(t) = 1 + t$. Represente graficamente o sinal $y(t) = x(t) - 2u(t - 1)$.

13. Considere o sinal $x(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ 1 - t & -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$. Represente graficamente os seguintes

sinais:

a) $x(t)$

b) $x(t)u(t)$

c) $x(t)u(-t)$

d) $x(t)u(t - 1)$

e) $x(t) + u(t - 1)$

f) $x(t - 1)u(t)$

g) $x(t - 1)u(t + 1)$

h) $x(t)u(t + 1)u(1 - t)$

i) $x(2t - 1)$

14. Considere o sinal $x(t)$ da figura P2. Obtenha uma expressão analítica e represente graficamente os seguintes sinais:

a) $x(t + 1)$

b) $x(1 - t)$

c) $x(2t + 1)$

d) $x(1,5t)$

e) $x(1,5t + 1)$

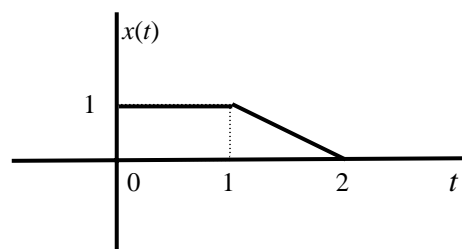


Figura P2. Gráfico do problema 14.

15. Considere o sinal $x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 4t & 0 \leq t < 5 \\ 20 & 5 \leq t \leq 10 \\ 0 & t > 10 \end{cases}$. Represente graficamente os seguintes

sinais:

a) $y(t) = x(5 - t)$

b) $z(t) = x\left(\frac{t}{5}\right)$

16. Calcule:

a) $f(t) = \frac{d}{dt} [A \cos(\omega t + \theta) u(t)]$

b) $g(t) = \int_{-\infty}^t A \cos(\omega t + \theta) u(t) dt$

17. Considere o sinal $x(t) = 2u(t-1) - 3u(t-2) + 2u(t-4)$. Calcule a sua derivada e represente graficamente os dois sinais.

18. Simplifique a expressão $\cos(t)\delta(t-\pi)$.

19. Considere o sinal $x(t) = t^2[u(t) - u(t-2)]$. Obtenha uma expressão para a derivada deste sinal, $\dot{x} = dx/dt$.

20. Calcule os seguintes integrais.

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} 4\delta(t)dt$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2 \delta(t-2)dt$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta(t-2)dt$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + \cos \pi t) \delta(t-1)dt$

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \delta(t-T)dt$

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \delta(2t-2)dt$

h) $\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \cos \pi t) \delta(t-1)dt$

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right)dt$

j) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T)dt$

k) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2t\delta(t-T)dt$

l) $\int_{-\infty}^t 2\tau u(\tau+1)\delta(\tau-1)d\tau$

m) $\int_{-\infty}^t u(\tau-3)d\tau$

n) $\int_5^{10} \cos(2\pi t) \delta(t-2)dt$

o) $\int_{-\infty}^t [\delta(t) - u(t) + 2u(t-1) - u(t-2) - \delta(t-2)]dt$

21. Seja $x(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$. Calcule $f(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$.

Sistemas

Introdução

Na análise de sistemas pretende-se saber o sinal de saída uma vez conhecido o sistema e o sinal à sua entrada. Neste capítulo faz-se uma primeira abordagem desta questão através do integral de convolução. São, também, fornecidos elementos de modelização e classificação de sistemas.

Representação de sistemas

A modelização mais interessante de um sistema permite obter o sinal (ou sinais) de saída $y(t)$ em função do sinal (ou sinais) de entrada $x(t)$ como

$$y(t) = @ [x(t)]$$

onde o operador @ não só identifica o sistema como representa a operação efectuada sobre o sinal de entrada para obter o sinal de saída.

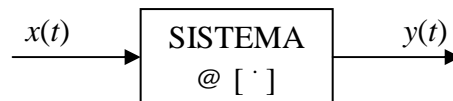


Figura 1. Representação de um sistema por um diagrama de blocos

Estas representações podem ser

- Relações instantâneas ou não dinâmicas

São exemplos destas relações

$$y(t) = A \, dx(t)/dt$$

que representa um sistema diferenciador e onde A é constante e

$$y(t) = ax(t) + bx^2(t)$$

que representa um amplificador de ganho a que introduz uma distorção não linear, $bx^2(t)$.

- Equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes

O exemplo mais próximo do estudante é dado pela relação entre tensão e corrente num circuito eléctrico constituído por elementos passivos obtida por aplicação das leis de Kirchhoff. Eliminando os integrais por derivações sucessivas obtém-se uma equação do tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t)$$

onde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ são constantes que dependem do sistema. Estes sistemas têm uma ordem igual à da derivada de maior ordem da variável dependente, *i.e.* da saída do sistema. Podem, no entanto, ocorrer diferenças face aos modelos indicados.

Se houver elementos variantes no tempo, os coeficientes não são mais constantes, mas antes funções do tempo e o sistema é variante no tempo.

Se houver elementos não lineares no sistema, a equação diferencial toma uma forma diferente. É o caso de um circuito RL em que o valor da resistência depende da corrente que a atravessa, por exemplo $R = R_1 + k i(t)$, com R_1 e k constantes, sendo a equação

$$[R_1 + k i(t)]i(t) + L \frac{di}{dt} = v(t)$$

pelo que a relação entrada saída não é linear e o sistema é não é linear.

Se o sistema for distribuído, *i.e.*, se os elementos que o modelizam tiverem dimensões infinitesimais, as variáveis do sistema vão depender não só do tempo mas também do espaço pelo que as equações diferenciais que representam o sistema são equações diferenciais às derivadas parciais.

- Relações integrais

Uma representação integral da relação entrada saída será vista mais tarde e é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \end{aligned}$$

que é o integral de convolução. A função $h(t)$ é a resposta impulsional do sistema, $h(t) = @ [\delta(t)]$, ou seja é a resposta do sistema a um sinal de entrada que é o impulso de Dirac quando todas as condições iniciais são nulas. Seja então $x(t) = \delta(t)$ e $x(t-\lambda) = \delta(t-\lambda)$ pelo que vem

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\delta(t-\lambda)d\lambda \\ &= h(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\lambda)d\lambda \\ &= h(t) \end{aligned}$$

Para além da resposta impulsional também se define resposta em degrau, que é a resposta ao degrau unitário quando todas as condições iniciais são nulas.

$$s(t) = @ [u(t)]$$

E resposta em rampa, que é a resposta à rampa unitária quando todas as condições iniciais são nulas.

$$y_r(t) = @ [r(t)]$$

Classificação de sistemas

Analisemos um conjunto de propriedades que nos permitem classificar os sistemas.

Sistemas contínuos e discretos

Um sistema é classificado em função do tipo de sinais presentes à sua entrada.

Um sistema contínuo processa sinais contínuos e apresenta sinais contínuos à saída.

Um sistema discreto processa sinais discretos e apresenta sinais discretos à saída.

Exemplo 1.

O sistema diferenciador discreto é descrito por

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Sistemas lineares e não lineares

Um sistema diz-se linear se satisfizer o princípio da sobreposição, *i.e.* as seguintes duas condições:

1. Aditividade

Dados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ vem

$$y_1(t) = @ [x_1(t)]$$

$$y_2(t) = @ [x_2(t)]$$

Para $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ vem

$$y(t) = @ [x(t)] = @ [x_1(t)] + @ [x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$$

2. Homogeneidade

Para $x_1(t)$ vem

$$y_1(t) = @ [x_1(t)]$$

então para $x(t) = ax_1(t)$ vem

$$y(t) = @ [x(t)] = a @ [x_1(t)] = ay_1(t)$$

Um sistema é não linear se não satisfizer pelo menos uma destas condições.

Exemplo 2.

Seja $y(t) = \cos[x(t)]$, então para $x_1(t)$ e $x_2(t)$ vem

$$y_1(t) = \cos [x_1(t)]$$

$$y_2(t) = \cos [x_2(t)]$$

Para $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ vem

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos [x(t)] = \cos [x_1(t) + x_2(t)] \\ &= \cos [x_1(t)] \cos [x_2(t)] - \sin [x_1(t)] \sin [x_2(t)] \\ &\neq y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

O sistema não é linear.

Sistemas invariantes no tempo e variantes no tempo

Um sistema diz-se invariante no tempo se a sua relação entrada saída não mudar com o tempo. Assim, se para $x(t)$ à entrada vier $y(t)$ à saída então também para $x(t - t_0)$ à entrada virá $y(t - t_0)$ à saída, que não é mais que uma réplica de $y(t)$ deslocada de t_0 . Quando esta condição não é satisfeita o sistema não é invariante no tempo.

Exemplo 3.

Um circuito modulador, em que $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$, tem para uma entrada $x_1(t) = x(t - t_0)$ um sinal de saída

$$y_1(t) = x(t - t_0)\cos(2\pi f_0 t) \\ \neq y(t - t_0)$$

O sistema não é invariante no tempo.

Uma classe de sistemas muito importante tem as propriedades de linearidade e de invariância no tempo é designada de sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT).

Sistemas com memória e sem memória

Um sistema é dito sem memória, ou instantâneo, se para um sinal de entrada num dado instante, a saída apenas depender da entrada nesse mesmo instante. Quando a saída depende de valores da entrada no instante presente e também em instantes do passado o sistema diz-se com memória, ou dinâmico.

Exemplo 4.

Um exemplo de sistema sem memória, ou instantâneo, é o caracterizado pela lei de Ohm aplicada a uma resistência $y(t) = Rx(t)$.

Um exemplo de sistema com memória, ou dinâmico, é um condensador com uma corrente aplicada $x(t)$ e uma tensão de saída $y(t)$, onde

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Outro exemplo de sistema com memória é descrito por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Sistemas causais e não causais

Para um sistema causal a saída $y(t)$ num dado instante t_0 apenas depende da entrada $x(t)$ em instantes anteriores a t_0 , i.e. $t \leq t_0$, mas não da entrada em instantes futuros. Um sistema não é causal se a sua saída num dado instante t_0 depender da entrada $x(t)$ em instantes posteriores a t_0 , i.e. $t > t_0$.

Exemplo 5.

O sistema diferenciador é um sistema causal.

O sistema modulador é um sistema causal.

O sistema de atraso definido por $y(t) = x(t - \Delta)$ é causal quando $\Delta > 0$ e é não causal quando $\Delta < 0$.

Todos os sistemas sem memória são causais, mas o contrário nem sempre é verdade.

Sistemas estáveis

Um sistema é estável, se a uma entrada limitada definida por $|x(t)| \leq k_1$, corresponder uma saída também limitada tal que $|y(t)| \leq k_2$. Esta definição pode ser expressa em termos da resposta impulsional $h(t)$. Um sistema é estável, se a sua resposta impulsional for absolutamente integrável, *i.e.*,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

O integral de convolução para sistemas lineares e invariantes no tempo

Para um sistema linear e invariante no tempo – SLIT – com resposta impulsional $h(t)$ pretende-se obter o sinal de saída $y(t)$ correspondente a um sinal de entrada $x(t)$ arbitrário.

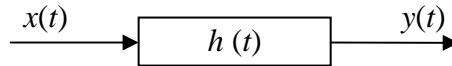


Figura 2. Sistema de resposta impulsional $h(t)$ com sinais de entrada e saída $x(t)$ e $y(t)$.

Sendo o sistema linear significa que é válido o princípio da sobreposição e sendo invariante no tempo significa que a um atraso à entrada corresponde um atraso idêntico à saída. Conhecemos a saída, $h(t)$, quando o sinal de entrada é um impulso de Dirac aplicado na origem. Temos um sinal $x(t)$, contínuo e arbitrário, e, por um processo de amostragem vamos obter um sinal equivalente, $\tilde{x}(t)$, constituído por uma combinação linear de impulsos de Dirac. Para este sinal é, então, possível obter o sinal correspondente de saída, $\tilde{y}(t)$, que é constituído por uma combinação linear de sinais $h(t)$, e que é equivalente ao sinal de saída, $y(t)$.

Vamos, inicialmente, substituir o sinal $x(t)$ pelo sinal $\tilde{x}(t)$, constituído por uma sequência de impulsos rectangulares de base $\Delta\lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_i$ e de altura igual à amplitude do sinal $x(t)$ nos instantes $t = \Delta\lambda/2$, conforme mostra a figura 3 e que pode ser representado por

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x(0)\Pi\left(\frac{t}{\Delta\lambda}\right) + x(\Delta\lambda)\Pi\left(\frac{t-\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right) + \dots + x(n\Delta\lambda)\Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta\lambda)\Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta\lambda)\frac{1}{\Delta\lambda}\Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)\Delta\lambda \end{aligned}$$

A informação colhida de $x(t)$ por este sinal em escada está contida na área de cada um dos impulsos rectangulares e é dada por $x(n\Delta\lambda)\Delta\lambda$. Esta aproximação por amostragem é tanto melhor quanto mais pequeno for o intervalo de amostragem $\Delta\lambda$ e, no limite, se fizermos $\Delta\lambda \rightarrow 0$, cada impulso rectangular, com área unitária, irá tender para um impulso de Dirac, *i.e.*,

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\lambda} \Pi\left(\frac{t - n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right) = \delta(t - \lambda_n)$$

onde substituímos $n\Delta\lambda$ pela variável λ_n e o sinal aproximação vem

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(\lambda_n) \delta(t - \lambda_n) \Delta\lambda$$

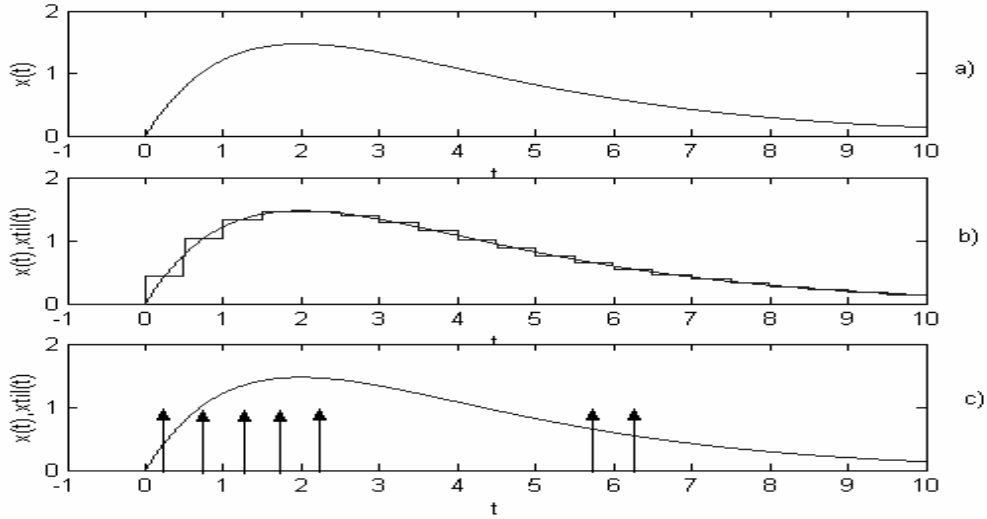


Figura 3. a) Sinal $x(t)$; b) aproximação em degrau e c) por impulsos de Dirac.

Para um sinal com esta forma e com um SLIT é possível obter o correspondente sinal de saída, $\tilde{y}(t)$, como uma combinação linear de sinais $h(t)$ com atrasos idênticos aos das respectivas entradas, como mostra a figura 4. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= x(0)h(t)\Delta\lambda + x(\lambda_1)h(t - \lambda_1)\Delta\lambda + \dots + x(\lambda_n)h(t - \lambda_n)\Delta\lambda + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(\lambda_n)h(t - \lambda_n)\Delta\lambda \end{aligned}$$

Também aqui, no limite, fazendo $\Delta\lambda \rightarrow 0$, o sinal $\tilde{y}(t)$ vai tornar-se mais suave e aproximar-se de $y(t)$ sendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(\lambda_n)h(t - \lambda_n)\Delta\lambda \rightarrow \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$$

tomando a forma

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$$

Genericamente, e para um sinal $x(t)$ onde $-\infty < t < \infty$ vem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$$

Fazendo $\sigma = t - \lambda$ podemos obter uma expressão equivalente

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \sigma)h(\sigma)d\sigma$$

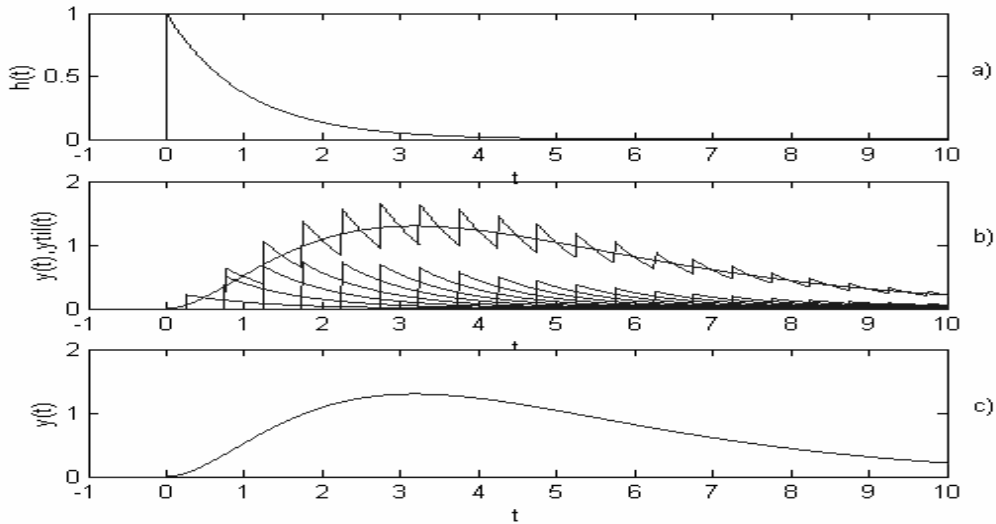


Figura 4. a) $h(t)$; b) construção do sinal $\tilde{y}(t)$ e c) sinal $y(t)$.

O integral de convolução é simbolizado pelo símbolo $*$ e tem as seguintes propriedades

1. Propriedade comutativa

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

2. Propriedade associativa

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

3. Propriedade distributiva

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Resposta em degrau

A resposta em degrau, $y_u(t)$ de um SLIT pode ser um instrumento útil na análise de sistemas e relaciona-se com a resposta impulsional do seguinte modo:

$$s(t) = @ [u(t)] = h(t) * u(t)$$

sendo

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) u(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda$$

A resposta em degrau obtém-se por integração da resposta impulsional ou, alternativamente,

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

a resposta impulsional obtém-se diferenciando a resposta em degrau.

Calculo do integral de convolução

Pela propriedade da comutatividade acima indicada o procedimento apresentado tanto pode ser aplicado ao sinal $h(t)$ como ao sinal $x(t)$, sendo escolhida a opção menos trabalhosa. Para apresentar o calculo do integral de convolução e o correspondente

procedimento gráfico consideremos de novo o caso das figuras 3 e 4, onde $x(t) = 2te^{-t/2}u(t)$ e $h(t) = e^{-t}u(t)$.

1. O sinal $x(\lambda)$ [ou a resposta impulsional $h(\lambda)$] é invertido no tempo para obter $x(-\lambda)$ [ou $h(-\lambda)$] e posteriormente deslocado de t para obter $x(t-\lambda) = x[-(\lambda-t)]$ [ou $h(t-\lambda) = h[-(\lambda-t)]$] que é uma função de λ com parâmetro t , como mostra a figura 5.

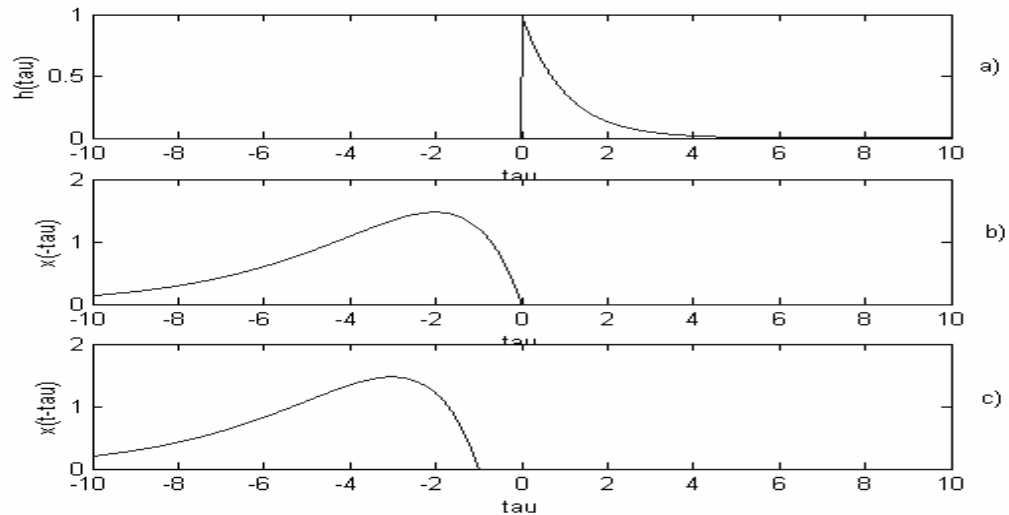


Figura 5. Representação gráfica de: a) $h(\lambda)$; b) $x(-\lambda)$; c) $x(t-\lambda)$ com $t = -1$.

2. Os sinais $h(\lambda)$ e $x(t-\lambda)$ [ou $x(\lambda)$ e $h(t-\lambda)$] são multiplicados para todos os valores de λ com t fixo num dado valor.
3. O produto $h(\lambda) x(t-\lambda)$ [ou $x(\lambda) h(t-\lambda)$] é integrado para todos os valores de λ para produzir um único valor do sinal de saída $y(t)$ no instante t , como mostra a figura 6.
4. Os passos 1 a 3 são repetidos para valores de t que variam entre $-\infty$ e ∞ para obter todo o sinal de saída $y(t)$.

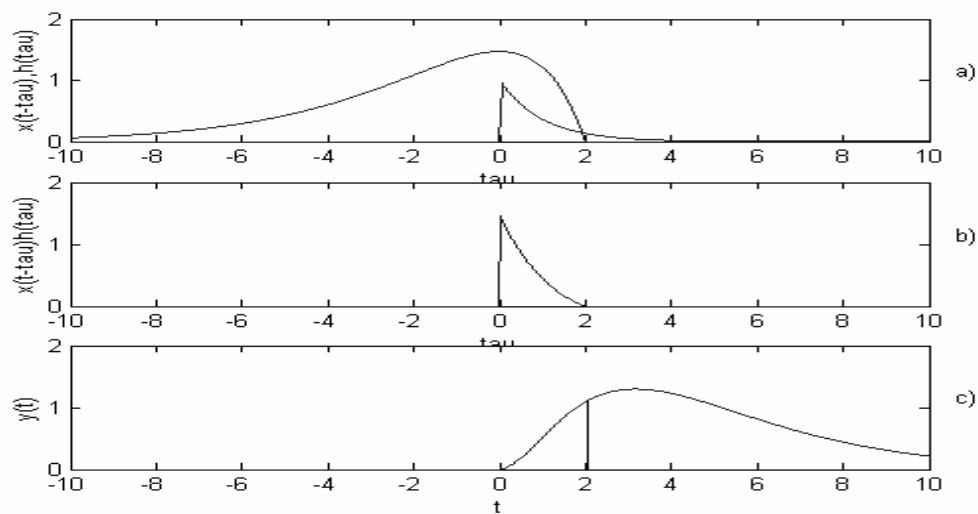


Figura 6. Representação gráfica de: a) $h(\lambda)$ e $x(t-\lambda)$ com $t = 2$; b) o produto de $h(\lambda)$ e $x(2-\lambda)$; c) o sinal de saída $y(t)$ com o valor de $y(2)$ igual à área do sinal em b) destacado.

Exemplo 6

Efectue a convolução de $x(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$ e $h(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)$.

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda$$

Na figura 7. podemos ver em a) a representação gráfica de $x(\lambda)$ e $h(\lambda)$ e nas outras alíneas o sinal $x(t-\lambda)$ e o produto $x(t-\lambda)h(\lambda)$ em cinco posições destacáveis de t . A partir desta representação gráfica podemos então fazer o calculo do integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_t^t d\lambda & 0 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t < 4 \\ \int_{t-2}^t d\lambda & 4 \leq t < 6 \\ \int_{t-2}^4 d\lambda & 4 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

pelo que

$$x(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 2 \\ 2 & 2 \leq t < 4 \\ 6-t & 4 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

como pode ser visto na figura 8. Analiticamente, exprimindo $x(t)$ e $h(t)$ em termos de funções degrau, podemos fazer

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(t-\lambda) - u(t-\lambda-2)][u(\lambda) - u(\lambda-4)]d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\lambda)u(\lambda)d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\lambda-2)u(\lambda)d\lambda - \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\lambda)u(\lambda-4)d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\lambda-2)u(\lambda-4)d\lambda \end{aligned}$$

Ora

- $u(t-\lambda)u(\lambda) \neq 0$ apenas para $0 < \lambda < t$ com $t > 0$.
- $u(t-\lambda-2)u(\lambda) \neq 0$ apenas para $0 < \lambda < t-2$ com $t > 2$.
- $u(t-\lambda)u(\lambda-4) \neq 0$ apenas para $4 < \lambda < t$ com $t > 4$.
- $u(t-\lambda-2)u(\lambda-4) \neq 0$ apenas para $4 < \lambda < t-2$ com $t > 6$.

e

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \left(\int_0^t d\lambda \right) u(t) - \left(\int_0^{t-2} d\lambda \right) u(t-2) - \left(\int_4^t d\lambda \right) u(t-4) + \left(\int_4^{t-2} d\lambda \right) u(t-6) \\ &= tu(t) - (t-2)u(t-2) - (t-4)u(t-4) + (t-6)u(t-6) \end{aligned}$$

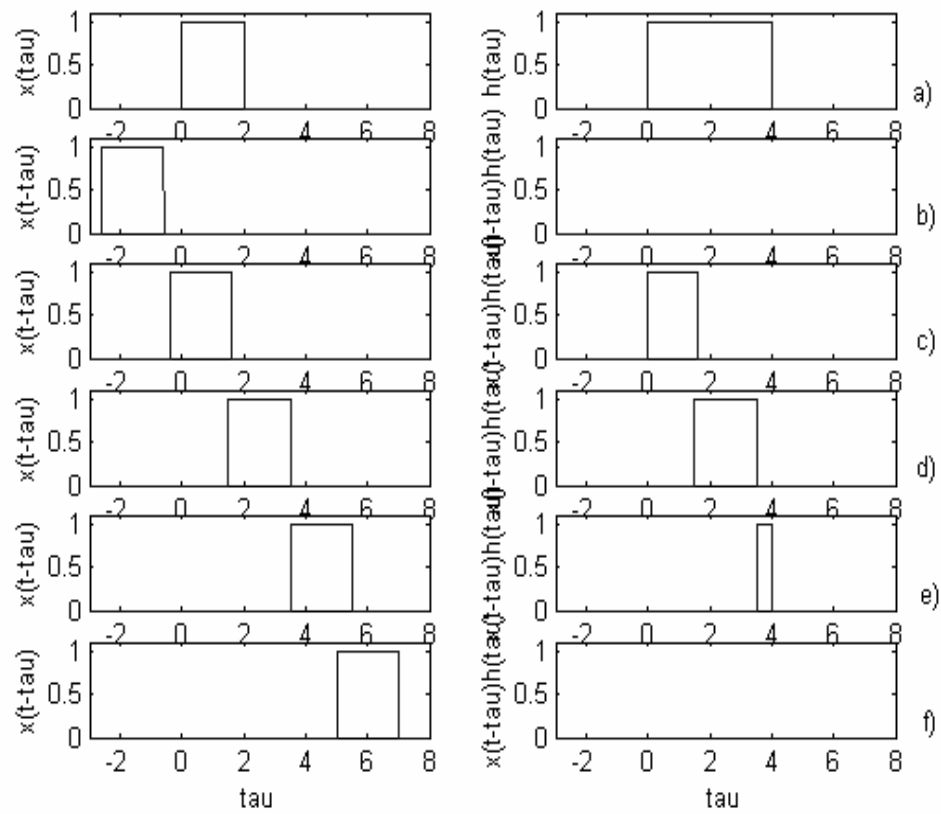


Figura 7. Passos na representação gráfica para o calculo da convolução do exemplo 6. Em a) $x(\lambda)$ e $h(\lambda)$ e nas outras alíneas $x(t-\lambda)$ e o produto $x(t-\lambda)h(\lambda)$ nas seguintes situações: b) $t < 0$; c) $0 \leq t < 2$; d) $2 \leq t < 4$; e) $4 \leq t < 6$; f) $t \geq 6$.

ou

$$x(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 2 \\ 2 & 2 \leq t < 4 \\ 6-t & 4 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

que pode ser visto na figura 8.

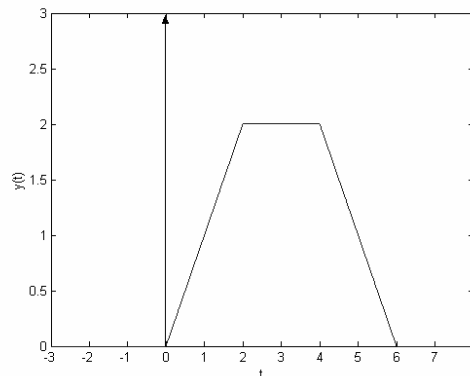


Figura 8. Resultado da convolução.

Conceitos de memória e função peso

O integral de convolução introduz os conceitos de memória e de função peso na análise de circuitos. A representação gráfica de $x(t-\lambda)$ pode traduzir a excitação do circuito no passado, no presente e no futuro. Ao combinar $x(t-\lambda)$ com $h(\lambda)$, a função impulsional pesa o sinal de entrada $x(t)$ de acordo com os seus valores do presente e do passado.

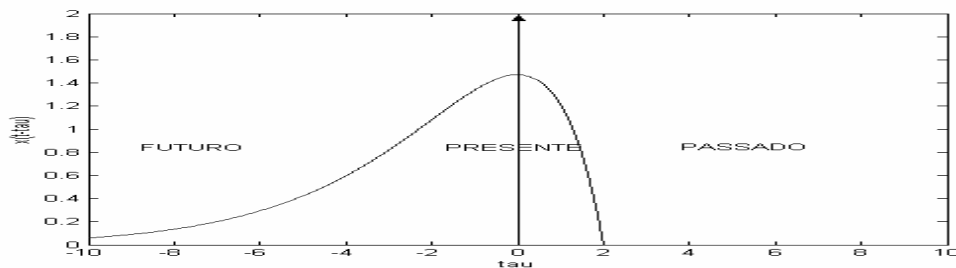


Figura 9. No sinal $x(t-\lambda)$ os instantes $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$ representam instantes do futuro, do presente e do passado, respectivamente.

Considerando um impulso rectangular à entrada de um sistema (Fig. 10) verifica-se que o sinal de saída vai tender para zero quando o valor presente do sinal de entrada for zero, *i.e.*, o valor presente do sinal de entrada tem mais peso do que os seus valores passados. Assim, a resposta impulsional pode ser considerada como a função de peso do circuito, e esta, por seu lado, determina a memória que o circuito tem. A memória traduz a capacidade do circuito de reproduzir à saída o sinal de entrada.

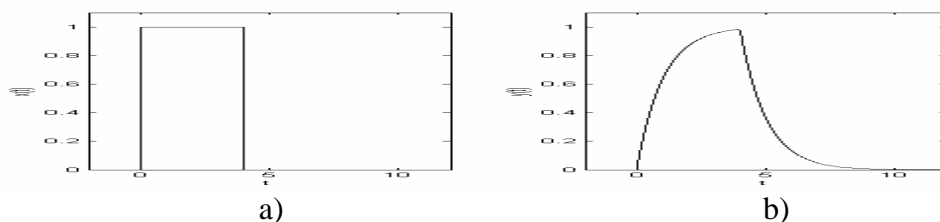


Figura 10. a) Sinal impulso rectangular; b) sinal de saída do sistema da Fig. 4 a).

Se $h(t) = u(t)$ a função peso é igual para o presente e para o passado, pelo que este circuito tem uma memória perfeita.

Se $h(t) = \delta(t)$ a função peso é nula para valores passados de $x(t)$ e este circuito não tem memória.

Quanto mais memória tiver um circuito mais distorção ocorre entre a excitação e o sinal de saída.

Exemplo 7.

Considere o circuito sem memória com $h(t) = A\delta(t)$, então

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma = Ax(t)$$

Para um circuito sem memória, a saída é uma réplica da entrada.

Sistemas descritos por equações diferenciais

Uma equação diferencial ordinária linear de coeficientes constantes e ordem N é dada por

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t)$$

ou

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

onde os coeficientes a_k e b_k são constantes reais. A solução geral desta equação para uma entrada arbitrária $x(t)$ é dada por

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

onde $y_p(t)$ é uma solução particular que satisfaz a equação e $y_h(t)$ é uma solução homogénea que satisfaz a equação diferencial homogénea

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

Para obter $y_h(t)$ é necessário conhecer um conjunto de N condições auxiliares, que, geralmente, são constituídas pelos valores de

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}}$$

num dado instante de tempo.

Exemplo 8.

Considere o circuito RC da figura 11 com sinal de entrada $x(t) = v_i(t)$ e sinal de saída $y(t) = v_o(t)$. O sinal de entrada $x(t)$ é aplicado no instante $t = t_0$ e a saída correspondente é $y(t_0) = y_0$. Obtenha uma equação diferencial que relacione $x(t)$ e $y(t)$ e efectue a respectiva solução pelo método de variação dos parâmetros.

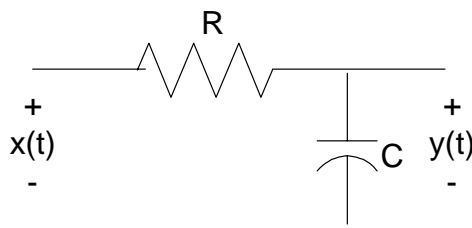


Figura 11. Circuito RC .

A equação diferencial deste circuito obtém-se por aplicação da lei de Kirchhoff das malhas, sendo

$$x(t) = Ri(t) + y(t)$$

e a corrente no condensador é

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$$

e substituindo, vem

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

A equação homogénea correspondente é

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$$

com uma solução da forma

$$y_h(t) = Ae^{pt}$$

Substituindo na equação homogénea vem $p = -1/RC$, pelo que

$$y_h(t) = Ae^{-t/RC}$$

A solução total consiste em $y_h(t)$ mais uma solução particular para o sinal específico $x(t)$. Pelo método de variação dos parâmetros vem

$$y(t) = A(t)e^{-t/RC}$$

Derivando, vem

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[\frac{dA(t)}{dt} - \frac{A(t)}{RC} \right] e^{-t/RC}$$

e, substituindo na equação diferencial

$$RC \frac{dA(t)}{dt} e^{-t/RC} = x(t)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} dt = \frac{x(t)}{RC} e^{t/RC} dt$$

$$A(t) = \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t x(\lambda) e^{\lambda/RC} d\lambda + A(t_0)$$

onde $A(t_0)$ é o valor inicial de $A(t)$. Como em $t = t_0$ vem $y(t_0) = y_0$, então podemos considerar

$$A(t_0) = y_0 e^{t_0/RC}$$

e

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t/RC} \left[\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t x(\lambda) e^{\lambda/RC} d\lambda + y_0 e^{t_0/RC} \right] \\ &= y_0 e^{-(t-t_0)/RC} + \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t x(\lambda) e^{-(t-\lambda)/RC} d\lambda \end{aligned}$$

Se admitirmos que o sinal $x(t)$ é aplicado no instante $t = -\infty$ sendo $y_0 = 0$, vem

$$y(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t x(\lambda) e^{-(t-\lambda)/RC} d\lambda$$

Por comparação com o integral de convolução podemos definir

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

pelo que

$$h(t-\lambda) = \frac{1}{RC} e^{-(t-\lambda)/RC} u(t-\lambda)$$

Funções próprias dos SLIT contínuos

As funções próprias dos SLIT contínuos são os sinais exponenciais complexos, e^{st} , onde s é a variável complexa, $s = \sigma + j\omega$ sendo,

$$@ [e^{st}] = \lambda e^{st}$$

onde λ é o valor próprio de @ associado a e^{st} . Aplicando o sinal $x(t) = e^{st}$ ao sistema com resposta impulsional $h(t)$, vem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} = H(s) e^{st} = \lambda e^{st}$$

sendo

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Assim, o valor próprio dos SLIT contínuos associado à função própria e^{st} é dado por $H(s)$, que é um complexo. Pela última expressão vemos, também, que o valor de $y(0) = H(s)$.

Os resultados anteriores estão subjacentes às definições das transformadas de Fourier e de Laplace.

Problemas

1. Considere o sistema descrito pela relação $y(t) = \text{sen}[x(t)]$. Verifique se este sistema é invariante no tempo.

2. Verifique a linearidade dos seguintes sistemas:

a) $y(t) = tx(t)$.

b) $y[n] = \text{Re}\{x[n]\}$.

3. Considere os sistemas descritos pelas relações a seguir indicadas onde $x(t)$ e $y(t)$ são os sinais de entrada e de saída, respectivamente. Caracterize-os quanto à linearidade, invariância no tempo, causalidade, memória e estabilidade, justificando sucintamente.

a) $y(t) = x^2(t)$

b) $y(t) = x(t)\text{sen}(2\pi f_0 t + \theta)$

c) $y(t) = dx(t)/dt$

d) $y(t) = k \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

4. Considere um sistema discreto de atraso unitário que à entrada $x[n]$ responde com o sinal $y[n] = x[n-1]$. Caracterize o sistema quanto à linearidade, invariância no tempo, causalidade, memória e estabilidade, justificando.

5. Considere o sistema com resposta impulsional $h(t) = u(t)$ e o sinal $x(t)$ à entrada. Obtenha uma expressão para o sinal de saída $y(t)$.

6. Calcule e desenhe o sinal de saída de um sistema com resposta impulsional $h(t) = e^{-t}u(t)$ quando o sinal de entrada é o sinal da figura P1.

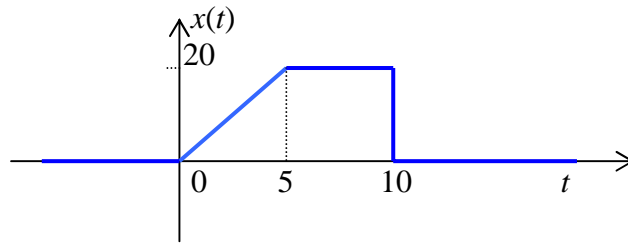


Figura P1. Sinal de entrada do problema 6.

7. Calcule e desenhe o sinal de saída de um sistema com resposta impulsional $h(t) = u(t)$ quando o sinal de entrada é $x(t) = 2[u(t) - u(t-2)]$.

8. Calcule e desenhe o sinal de saída de um sistema com resposta impulsional $h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{4}e^{-t/2}u(t)$ quando o sinal de entrada é $x(t) = u(t) - u(t-1)$.

9. Obtenha uma expressão para o sinal de saída, $y(t)$ do sistema de resposta impulsional $h(t) = \Pi[(t-1)/2]$ com $x(t) = \Pi[(t-1)/2]$.

10. Considere o sistema com resposta impulsional $h(t) = u(t-10)$ com o sinal $x(t) = \Pi[(t-1)/2]$ à entrada. Obtenha uma expressão para o sinal de saída, $y(t)$.

11. O sistema com resposta impulsional $h(t) = e^{-4t}u(t)$ tem à entrada o sinal $x(t) = u(t)$. Obtenha o sinal de saída $y(t)$.

12. O sistema com resposta impulsional $h(t) = e^{-t}u(t)$ tem à entrada o sinal $x(t) = tu(t)$. Obtenha uma expressão para o sinal de saída $y(t)$.

13. Considere o sistema com resposta impulsional $h(t) = e^{-t}u(t)$ com o sinal $x(t) = u(t-1) - u(t-3)$ à entrada. Obtenha uma expressão para o sinal de saída, $y(t)$.

14. O sistema com resposta impulsional $h(t) = e^{-t}u(t)$ tem à entrada o sinal $x(t) = e^t u(-t)$. Obtenha uma expressão para o sinal de saída, $y(t)$.

15. O sistema com resposta impulsional $h(t) = u(t) - u(t-2)$ tem à entrada o sinal $x(t) = u(t) - u(t-3)$. Obtenha uma expressão para o sinal de saída $y(t)$.

16. O sistema com resposta impulsional $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{Outros valores} \end{cases}$ tem à entrada o

sinal $x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{Outros valores} \end{cases}$. Obtenha uma expressão para o sinal de saída, $y(t)$.

Série de Fourier

Introdução

Uma alternativa ao cálculo da saída do sistema pela convolução do sinal de entrada e da sua resposta impulsional consiste em expandir o sinal de entrada numa combinação linear de sinais simples cuja saída se pode obter de forma expedita e, a partir destas, aplicando a propriedade da linearidade, obter uma expressão do sinal de saída.

Espaços de sinais

Consideremos o estudo de vectores no espaço tridimensional. A representação de um vector \mathbf{A} num sistema de coordenadas cartesiano requer a caracterização de três direcções privilegiadas do espaço definidas por um conjunto de três vectores ortogonais e de norma unitária, \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} segundo os eixos dos xx , yy e zz , respectivamente, pelo que

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

sendo as componentes

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}, A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}, A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k}$$

onde o ponto representa o produto interno de dois vectores definido como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Consideremos agora um sinal de energia finita $x(t)$, definido num intervalo de tempo $t_0 < t < t_0 + T$, que pode ser definido em termos de um conjunto de funções do tempo bem conhecidas, $\phi_1(t)$, ..., $\phi_n(t)$. Estas funções devem ter as mesmas características que tinham os versores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} do espaço vectorial cartesiano, devem ser ortogonais e de norma unitária. Assim, define-se produto interno de dois sinais $a(t)$ e $b(t)$, definidos no intervalo $t_0 < t < t_0 + T$, como

$$\langle a(t), b(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) b^*(t) dt$$

e norma do sinal $a(t)$ como

$$\|a(t)\| = \langle a(t), a(t) \rangle = \sqrt{\int_{t_0}^{t_0+T} |a(t)|^2 dt}$$

Assim, os sinais $\phi_1(t)$, ..., $\phi_n(t)$ são ortogonais, *i.e.*,

$$\langle \phi_n(t), \phi_m(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt = 0, n \neq m$$

e têm norma unitária, *i.e.*,

$$\|\phi_n(t)\| = \sqrt{\int_{t_0}^{t_0+T} |\phi_n(t)|^2 dt} = 1$$

o que pode ser resumido por

$$\langle \phi_n(t), \phi_m(t) \rangle = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

onde $\delta_{m,n}$ é o delta de Kronecker.

Deste modo, o sinal $x(t)$ pode ser expandido em função da base ortonormal $\{\phi_n(t)\}$ como

$$x(t) = \sum_n x_n \phi_n(t) = \sum_n \langle x(t), \phi_n(t) \rangle \phi_n(t)$$

com

$$x_n = \langle x(t), \phi_n(t) \rangle$$

Pode representar-se o equivalente do teorema de Pitágoras para sinais como

$$\|a(t)\|^2 = \int_{t_0}^{t_0+T} |a(t)|^2 dt = \sum_n |a_n|^2 = \sum_n |\langle a(t), \phi_n(t) \rangle|^2$$

e o equivalente da inequação de Cauchy-Schwartz é

$$\left| \int_{t_0}^{t_0+T} a(t)b^*(t)dt \right| \leq \left[\int_{t_0}^{t_0+T} |a(t)|^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_{t_0}^{t_0+T} |b(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

onde ao sinal de igual corresponde a ser $a(t) = kb(t)$ com k complexo.

A resposta de um SLIT, que efectua a transformação designada por L , a um sinal $x(t)$ cuja expansão numa base ortonormal $\{\phi_n(t)\}$ é

$$x(t) = \sum_n x_n \phi_n(t)$$

é dada por

$$y(t) = L[x(t)] = L \left[\sum_n x_n \phi_n(t) \right] = \sum_n x_n L[\phi_n(t)]$$

sendo apenas é necessário conhecer a resposta do sistema aos sinais da base $\{\phi_n(t)\}$.

Série de Fourier

Vimos já que as exponenciais complexas são as funções próprias dos SLIT. A resposta de um SLIT a um sinal exponencial complexo é um sinal exponencial complexo com a mesma frequência, mas amplitude e fase diferentes.

Teorema da série de Fourier

Seja $x(t)$ um sinal periódico de período T_0 , que satisfaz as condições[†] seguintes

1. $x(t)$ é absolutamente integrável no seu período T_0 , i.e.,

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

2. O número de máximos e mínimos de $x(t)$ em T_0 é finito.

3. O número de descontinuidades de $x(t)$ em T_0 é finito

pode ser expandido em exponenciais complexas, sendo

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

[†] Condições de Dirichlet.

onde x_n são os coeficientes do desenvolvimento em série de Fourier

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt$$

Também, $f_0 = 1/T_0$ é a frequência fundamental do sinal $x(t)$ e $nf_0 = n/T_0$ é o seu harmônico de ordem n . Nos limites de integração o valor de α pode ser um qualquer, por exemplo 0, $-T_0/2$ ou $-T_0/4$, sendo de escolher aquele que levar a um cálculo mais simples do integral. Também, o valor de x_n para $n = 0$

$$x_0 = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) dt$$

é o valor médio de $x(t)$ ao longo de um período.

As três condições anteriores são condições suficientes de existência da série de Fourier, *i.e.*, é possível obter este desenvolvimento em série para sinais que não satisfazem aquelas condições.

Para descrever um sinal periódico $x(t)$ basta conhecer o seu período T_0 e um conjunto enumerável de números complexos. Em contrapartida, na descrição de $x(t)$ como função do tempo é necessário um conjunto infinito de pontos.

Pode exprimir-se a série de Fourier em termos da frequência angular $\omega_0 = 2\pi f_0$, sendo

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t}$$

onde

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Exemplo 1

A expansão em série de Fourier do sinal $x(t)$ periódico de período T_0 e $\tau < T_0$ descrito pela expressão

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-nT_0}{\tau}\right)$$

tem coeficientes

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T_0} t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jn\frac{2\pi}{T_0} t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \frac{T_0}{-j2\pi n} \left[e^{-j\frac{n\pi}{T_0} \tau} - e^{j\frac{n\pi}{T_0} \tau} \right] = \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) = \frac{\tau}{T_0} \operatorname{senc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) \end{aligned}$$

pelo que

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_0} \operatorname{senc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) e^{j\frac{2\pi n}{T_0} t}$$

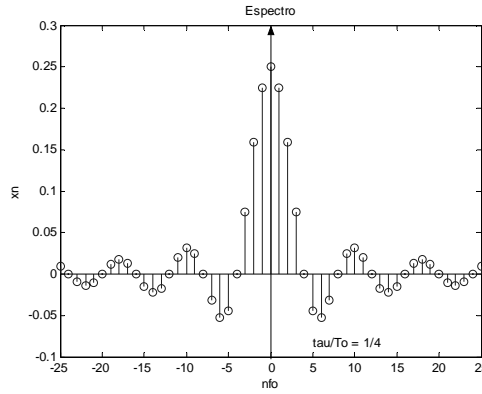


Figura 1. Espectro discreto do trem de impulsos $x(t)$

Simetria dos coeficientes da série de Fourier

Por aplicação da fórmula de Euler podemos exprimir os coeficientes da série de Fourier como

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt - \frac{j}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt \end{aligned}$$

Quando o sinal $x(t)$ é um sinal real então o primeiro termo desta expressão representa a parte real de $x(t)$ e o segundo termo representa a sua parte imaginária. Assim, vem

$$x_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

Podemos ainda verificar que a_n é uma função par de n , $a_n = a_{-n}$, e b_n é uma função ímpar de n , $b_n = -b_{-n}$, i.e., x_n tem simetria hermitiana, pelo que

$$x_n = x_{-n}^*$$

Alternativamente, podemos exprimir x_n em forma polar como

$$x_n = |x_n| e^{j\angle x_n}$$

tendo o módulo simetria par, $|x_n| = |x_{-n}|$, e a fase simetria ímpar, $\angle x_n = -\angle x_{-n}$, como pode ser verificado na figura 2.

É usual designar a representação gráfica de $x_n = |x_n| e^{j\angle x_n}$ em termos de n como o espectro discreto, ou espectro de linhas, do sinal $x(t)$, sendo necessário um gráfico para o espectro de amplitude e outro para o espectro de fase.

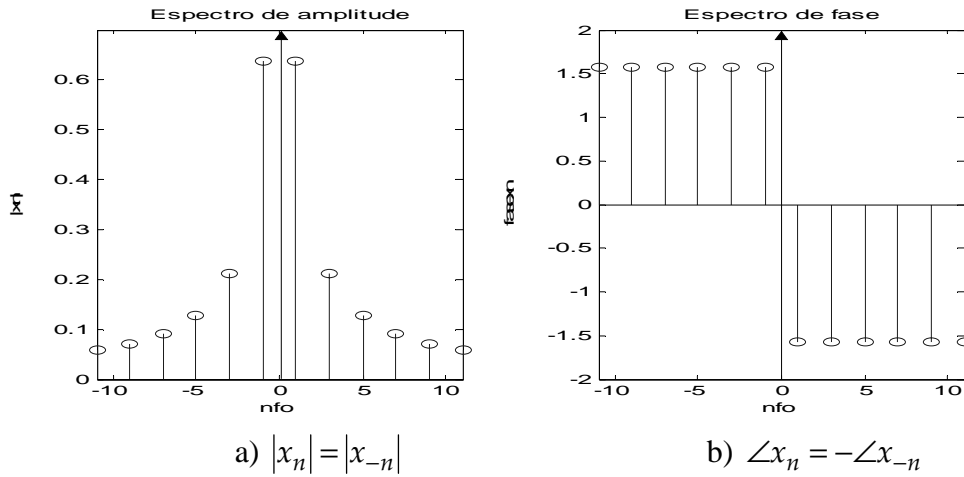


Figura 2. Espectro de um sinal em módulo, a) e fase, b).

Série de Fourier trigonométrica

Se na representação do sinal $x(t)$ por uma série de Fourier exponencial complexa

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t}$$

substituímos o coeficiente x_n pelas suas partes real e imaginária, teremos para cada par de parcelas simétricas em n , aplicando a propriedade da simetria hermitiana,

$$\begin{aligned} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} + x_{-n} e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} &= \frac{a_n - jb_n}{2} e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} \\ &= a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) + b_n \sen\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) \end{aligned}$$

Para $n = 0$ e por b_n ter simetria ímpar vem que $x_0 = a_0 / 2$. A série de Fourier apresenta assim a forma de uma expansão trigonométrica

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) + b_n \sen\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) \right]$$

Para obter a_n e b_n aplicamos a formula de Euler

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt - \frac{j}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \sen\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \sen\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt \end{aligned}$$

Um outro formalismo para a série de Fourier obtém-se representando x_n em módulo e fase. Analogamente, para cada par de parcelas simétricas em n e aplicando a propriedade da simetria hermitiana vem

$$x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} + x_{-n} e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} = 2|x_n| \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t + \angle x_n\right)$$

sendo

$$x(t) = x_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t + \angle x_n\right)$$

e

$$|x_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\angle x_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Expansão em série de Fourier de sinais reais pares e ímpares

Seja $x(t)$ um sinal periódico, real e com simetria par, então vem $b_n = 0$ e x_n é real pelo que

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right)$$

Seja $x(t)$ um sinal periódico, real e com simetria ímpar, então vem $a_n = 0$ e x_n é imaginário pelo que

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right)$$

Exemplo 2.

Considere o sinal $x(t)$ periódico de período T_0 que no intervalo $0 < t < T_0$ é definido por

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T_0/2 \\ -A & T_0/2 < t < T_0 \end{cases}$$

Obtenha uma expansão em série de Fourier para este sinal.

O sinal $x(t)$ tem simetria ímpar pelo que no desenvolvimento em série de Fourier trigonométrica os coeficientes a_n são nulos, e

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right)$$

Então

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} A \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt - \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} A \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt \\
&= \frac{2A}{T_0} \left[\frac{-\cos(2\pi n t / T_0)}{2\pi n / T_0} \Big|_0^{T_0/2} + \frac{\cos(2\pi n t / T_0)}{2\pi n / T_0} \Big|_{T_0/2}^{T_0} \right] \\
&= \frac{A}{\pi n} [-\cos(\pi n) + 1 + \cos(2\pi n) - \cos(\pi n)] \\
&= \frac{2A}{\pi n} [1 - \cos(\pi n)] \\
&= \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{4A}{\pi n} & n \text{ impar} \end{cases}
\end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{4A}{\pi} \left[\sin\left(2\pi \frac{1}{T_0} t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(2\pi \frac{3}{T_0} t\right) + \frac{1}{5} \sin\left(2\pi \frac{5}{T_0} t\right) + \dots \right] \\
&= \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(2\pi \frac{2n+1}{T_0} t\right)
\end{aligned}$$

A representação gráfica deste sinal, sob a forma de uma soma limitada de parcelas, *i.e.*, um número limitado de harmónicos, está feita na figura 3.

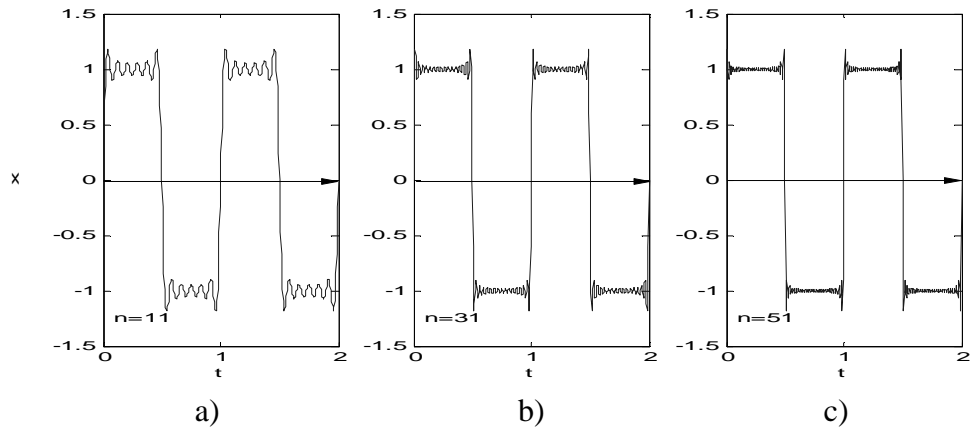


Figura 3. Representação de $x(t)$ para $0 < t < 2T_0$ por uma série de Fourier truncada sendo o maior harmónico: a) $n = 11$, b) $n = 31$, c) $n = 51$ [‡].

Expansão em série de Fourier de sinais harmónicos pares e ímpares

Outro tipo de simetria é a simetria de meia onda, caracterizada por

$$x\left(t \pm \frac{T_0}{2}\right) = \pm x(t)$$

[‡] Ver parágrafo do ‘Fenómeno de Gibbs’.

onde o sinal do lado direito se for positivo representa simetria par e se for negativo representa simetria ímpar. Ora, do ponto de vista da sua representação espectral um sinal harmónico ímpar é tal que apenas apresenta múltiplos de ordem ímpar da sua frequência fundamental, sendo

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{2n+1} e^{j2\pi \frac{2n+1}{T_0} t}$$

Então

$$\begin{aligned} x\left(t + \frac{T_0}{2}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{2n+1} e^{j2\pi \frac{2n+1}{T_0} \left(t + \frac{T_0}{2}\right)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{2n+1} e^{j2\pi \frac{2n+1}{T_0} t} e^{j\pi(2n+1)} \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{2n+1} e^{j2\pi \frac{2n+1}{T_0} t} \\ &= -x(t) \end{aligned}$$

Pelo que um sinal harmónico ímpar tem simetria de meia onda também ímpar. O sinal do exemplo 2 é um sinal harmónico ímpar. Analogamente um sinal harmónico par é tal que apenas apresenta múltiplos de ordem par da sua frequência fundamental e podemos constatar que

$$x\left(t \pm \frac{T_0}{2}\right) = x(t)$$

o que, na realidade, significa que o período fundamental deste sinal é $T_0 / 2$ e não T_0 . A caracterização de um sinal como harmónico par ou ímpar não depende da origem dos tempos, ao contrário do que acontece na definição de sinais pares e ímpares. Estes estão associados à fase e os outros à frequência.

Outras propriedades da série de Fourier

- Linearidade

Sejam $x(t)$ e $y(t)$ sinais periódicos, ambos com o mesmo período T_0 , e desenvolvimento em série de Fourier de coeficientes, respectivamente x_n e y_n . O sinal $z(t) = Ax(t) + By(t)$ também é um sinal periódico de período T_0 e com expansão em série de Fourier

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

onde

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} [Ax(t) + By(t)] e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt \\ &= Ax_n + By_n \end{aligned}$$

- Translação nos tempos

Seja $x(t)$ um sinal periódico com período T_0 e desenvolvimento em série de Fourier de coeficiente x_n . O sinal $y(t) = x(t - t_0)$ também é periódico de período T_0 e com expansão em série de Fourier com coeficiente y_n

$$y_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t - t_0) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt$$

fazendo $\tau = t - t_0$ vem

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{T_0} \int_{\alpha'}^{\alpha'+T_0} x(\tau) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} (\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t_0} \frac{1}{T_0} \int_{\alpha'}^{\alpha'+T_0} x(\tau) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} \tau} d\tau \\ &= e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t_0} x_n \end{aligned}$$

Verificamos que $|x_n| = |y_n|$.

Exemplo 3.

A partir do resultado do exemplo 1 obtenha os coeficientes do desenvolvimento em série de Fourier do sinal

$$y(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - t_0 - nT_0}{\tau}\right)$$

O sinal do exemplo 1 tinha

$$x_n = \frac{\tau}{T_0} \text{senc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)$$

Então

$$y_n = \frac{A\tau}{T_0} e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t_0} \text{senc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)$$

- Mudança de escala no tempo

Seja $x(t)$ um sinal periódico com período T_0 e desenvolvimento em série de Fourier de coeficiente x_n . O sinal $x(\alpha t)$ também é periódico, mas o seu período é T_0 / α e com expansão em série de Fourier dada por

$$x(\alpha t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi \frac{\alpha n}{T_0} t}$$

Os coeficientes da expansão em série de Fourier são idênticos, no entanto o seu desenvolvimento é diferente assim como o seu espectro de riscas.

- Inversão do tempo

Seja $x(t)$ um sinal periódico com período T_0 e desenvolvimento em série de Fourier de coeficiente x_n . O sinal $y(t) = x(-t)$ também é periódico de período T_0 e com expansão em série de Fourier dada por

$$y(t) = x(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

fazendo $n = -m$ temos

$$y(t) = x(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{-n} e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

sendo

$$y_n = x_{-n}$$

A inversão do tempo para o sinal $x(t)$ produz uma inversão da sequência dos coeficientes da série de Fourier. Como consequência vem que se o sinal $x(t)$ for par, *i.e.* $x(-t) = x(t)$, então também os seus coeficientes são pares, $x_{-n} = x_n$ e se o sinal $x(t)$ for ímpar, *i.e.* $x(-t) = -x(t)$, então também os seus coeficientes são ímpares, $x_{-n} = -x_n$.

- Multiplicação

Sejam $x(t)$ e $y(t)$ sinais periódicos, ambos com o mesmo período T_0 , e desenvolvimento em série de Fourier de coeficientes, respectivamente x_n e y_n . O sinal $z(t) = x(t)y(t)$ também é um sinal periódico de período T_0 e com expansão em série de Fourier

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m e^{j2\pi \frac{m}{T_0} t} \right) \end{aligned}$$

onde

$$z_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}$$

- Relação de Parseval

Pelo teorema de Pitágoras fazendo a expansão do sinal $x(t)$ numa base ortonormal $\{\phi_n(t)\}$ como $x(t) = \sum_n x_n \phi_n(t)$ vem

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = \sum_n |x_n|^2$$

Considere a expansão em série de Fourier do sinal $x(t)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

e

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^* e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

e o seu produto

$$|x(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n x_m^* e^{j2\pi \frac{n-m}{T_0} t}$$

como

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} e^{j2\pi \frac{n-m}{T_0} t} dt = T_0 \delta_{m,n} = \begin{cases} T_0 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n x_m^* T_0 \delta_{m,n} \\ &= T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

O que diz que o conteúdo de potência do sinal periódico $x(t)$ é igual à soma do conteúdo de potência de todos os seus harmónicos. Se exprimirmos x_n em termos de a_n e b_n vem

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Resposta de SLIT a sinais periódicos

Vimos já que as funções próprias dos SLIT contínuos são os sinais exponenciais complexos. Aplicando o sinal $e^{j2\pi t/T_0}$ ao sistema com resposta impulsional $h(t)$, vem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j2\pi(t-\tau)/T_0} d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi\tau/T_0} d\tau \right] e^{j2\pi t/T_0} = H(f) \Big|_{f=\frac{1}{T_0}} \left(e^{j2\pi t/T_0} \right)$$

sendo

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

que é uma função complexa de f designada de resposta em frequência do sistema. Seja, então, o sinal periódico $x(t)$ de período T_0 com desenvolvimento em série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

à entrada de um SLIT. O sinal de saída vem

$$y(t) = @ [x(t)] = @ \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n @ \left[e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \right]$$

i.e.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

onde $H(n/T_0) = H(f)|_{f=\frac{n}{T_0}}$. Este sinal também é periódico com o mesmo período T_0

e com um desenvolvimento em série de Fourier com coeficientes y_n , tal que

$$y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

onde

$$|y_n| = |x_n| \cdot \left| H\left(\frac{n}{T_0}\right) \right|$$

$$\angle y_n = \angle x_n + \angle H(n/T_0)$$

Um SLIT não introduz, assim, novas frequências nas componentes do sinal de saída.

Estas aparecem modificadas, face às componentes de entrada, de $\left| H\left(\frac{n}{T_0}\right) \right|$ para a amplitude e de $\angle H(n/T_0)$ para a fase que são funções da ordem harmónica n e da resposta em frequência do sistema $H(f)$.

Exemplo 4.

Considere o sinal do exemplo 2, periódico de período T_0 que no intervalo $0 < t < T_0$ é definido por

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T_0/2 \\ -A & T_0/2 < t < T_0 \end{cases}$$

à entrada do filtro RC , do exemplo 8 do capítulo anterior, em que $H(f) = 1/(1 + j2\pi fRC)$ [§]. Represente o sinal de saída, $y(t)$, por uma expansão em série de Fourier.

O sinal de entrada é

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \text{sen}\left(2\pi \frac{2n+1}{T_0} t\right)$$

Vamos, inicialmente, obter o desenvolvimento em série de Fourier complexa deste sinal

[§] Ver exemplo 13 do capítulo seguinte.

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\frac{e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} - e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t}}{2j} + \frac{1}{3} \frac{e^{j2\pi\frac{3}{T_0}t} - e^{-j2\pi\frac{3}{T_0}t}}{2j} + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \frac{e^{j2\pi\frac{5}{T_0}t} - e^{-j2\pi\frac{5}{T_0}t}}{2j} + \frac{1}{7} \frac{e^{j2\pi\frac{7}{T_0}t} - e^{-j2\pi\frac{7}{T_0}t}}{2j} + \dots \right]$$

$$x(t) = \frac{2A}{j\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{j(2n+1)\frac{2\pi}{T_0}t}$$

O sinal de saída vem, então

$$y(t) = \frac{2A}{j\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} H\left(\frac{2n+1}{T_0}\right) e^{j(2n+1)\frac{2\pi}{T_0}t} \\ = \frac{2A}{j\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{1}{1 + j2\pi RC(2n+1)/T_0} \right] e^{j(2n+1)\frac{2\pi}{T_0}t}$$

Cuja representação gráfica para $RC = 0,05$ s é dada na figura 4 e sob a forma de uma soma limitada de parcelas, *i.e.*, um número máximo de $n = 21$ harmónicos.

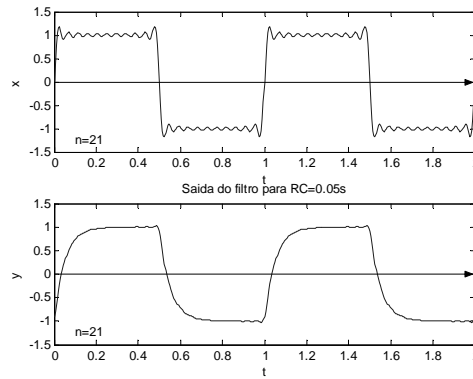


Figura 4. Sinais: a) de entrada, $x(t)$ e b) de saída, $y(t)$.

A representação espectral dos sinais de entrada e de saída é dada na figura 5, bem como a resposta em frequência do filtro, a tracejado, em módulo e fase.

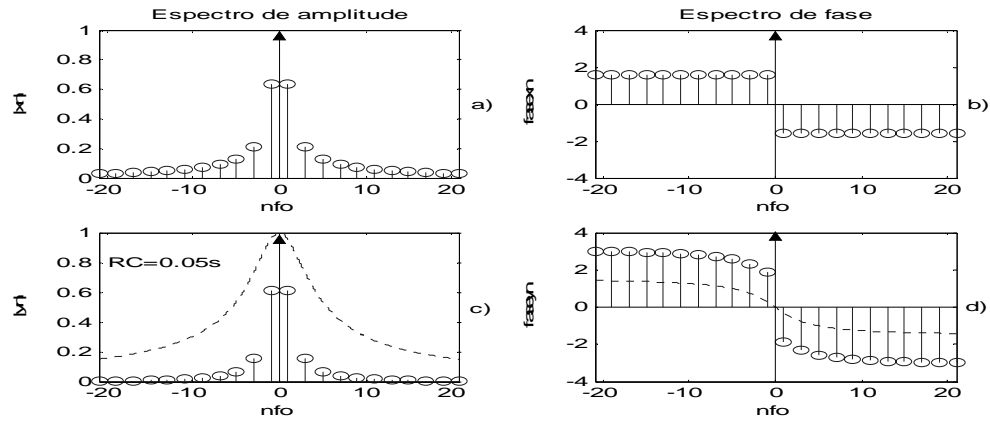


Figura 5. Espectro dos sinais de entrada $x(t)$: a) em módulo, b) em fase, e de saída $y(t)$: c) em módulo, d) em fase.

Série truncada

Admitamos que para um sinal $f(t)$ periódico se faz uma aproximação em série que usa apenas um número finito de harmónicos. Seja $f_m(t)$ essa aproximação

$$f_m(t) = \sum_{k=-m}^{+m} a_k e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t}$$

Se para os coeficientes a_k adoptarmos a forma

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} f(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt$$

temos uma série de Fourier truncada. A diferença, em cada instante de tempo, entre a aproximação $f_m(t)$ e o sinal $f(t)$ é o erro $e(t)$, dado por

$$e(t) = f(t) - f_m(t)$$

Vamos calcular o erro quadrático médio, como medida da precisão da aproximação $f_m(t)$, que é definido por

$$\begin{aligned} \overline{e^2(t)} &= \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} e^2(t) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} [f(t) - f_m(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} \left[f(t) - \sum_{k=-m}^{+m} a_k e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} \right]^2 dt \end{aligned}$$

Consideremos o melhor conjunto de coeficientes a_k como aquele que minimiza o erro quadrático médio, pelo que vamos calcular a derivada parcial da equação anterior em ordem a cada a_k e igualar a zero e resolver em ordem a cada a_k .

$$\frac{\partial \overline{e^2(t)}}{\partial a_l} = \frac{\partial}{\partial a_l} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} \left[f(t) - \sum_{k=-m}^{+m} a_k e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} \right]^2 dt \right\} = 0$$

A derivada parcial em ordem a cada coeficiente específico a_l , de todos os termos da equação anterior é nula, com excepção do termo onde $k = l$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} 2 \left[f(t) - \sum_{k=-m}^{+m} a_k e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} \right] \left[-e^{j2\pi \frac{l}{T_0} t} \right] dt &= 0 \\ -\frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} f(t) e^{j2\pi \frac{l}{T_0} t} dt + \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} \sum_{k=-m}^{+m} a_k e^{j2\pi \frac{(k+l)}{T_0} t} dt &= 0 \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} \sum_{k=-m}^{+m} a_k e^{j2\pi \frac{(k+l)}{T_0} t} dt &= \sum_{k=-m}^{+m} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} a_k e^{j2\pi \frac{(k+l)}{T_0} t} dt \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} a_{-l} dt \end{aligned}$$

devido à ortogonalidade das exponenciais complexas, a única parcela não nula corresponde a ser $k = -l$, e

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} f(t) e^{j2\pi \frac{l}{T_0} t} dt = T_0 a_{-l}$$

pelo que

$$a_{-l} = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} f(t) e^{j2\pi \frac{l}{T_0} t} dt \Rightarrow a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} f(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt$$

que é, por definição, o coeficiente do desenvolvimento em série de Fourier. Deste modo, estes coeficientes são os que minimizam o erro quadrático médio entre a função e a sua aproximação por uma série harmónica truncada.

O fenómeno de Gibbs

Acabamos de verificar que os coeficientes do desenvolvimento em série de Fourier dão a melhor aproximação de um sinal periódico por uma série harmónica truncada. É de esperar que, introduzindo mais termos na série truncada, menor será o erro quadrático médio e melhor será a aproximação do sinal. Graficamente, a adição de mais parcelas equivale à diminuição das ondulações à volta da forma exacta do sinal e à consequente diminuição do erro correspondente, o que pode ser verificado na figura 3. No entanto, mesmo usando um número infinito de termos, portanto a série de Fourier completa, não se obtém um imagem perfeita do sinal nos pontos de descontinuidades deste. Neste pontos, a representação por uma série de Fourier completa excede em 9%, simultaneamente à esquerda e à direita, o valor da descontinuidade. Esta ocorrência designa-se de fenómeno de Gibbs. Se a aproximação

de um sinal com descontinuidades for feita por uma série truncada então esta apresenta-se como um sinal contínuo que atravessa os pontos de descontinuidade no seu valor médio e que ultrapassa com ondulações o sinal real, simultaneamente à sua esquerda e à sua direita.

Problemas com condições fronteira

Apesar de apenas termos estudado sinais periódicos é de realçar que o cálculo dos coeficientes apenas requer o conhecimento do sinal $x(t)$ num intervalo de tempo de comprimento T_0 . Assim, se $x(t)$ for apenas dado num intervalo T_0 ainda se podem obter os coeficientes de uma expansão em série de Fourier, que fora do referido intervalo converge para um sinal que é uma extensão periódica do sinal $x(t)$. Neste contexto, há várias aplicações da série de Fourier ao estudo de problemas com condições fronteira. São disto exemplo problemas de propagação de calor, com a equação de Laplace e problemas de sistemas vibrantes. O exemplo seguinte estuda o movimento de vibração de um fio.

Exemplo 5.

Um fio de violino de comprimento L e extremidades fixas é puxado pelo seu centro a uma distância d da sua posição de equilíbrio e posteriormente solto. Obtenha uma expressão para o seu deslocamento numa posição e num instante de tempo qualquer.

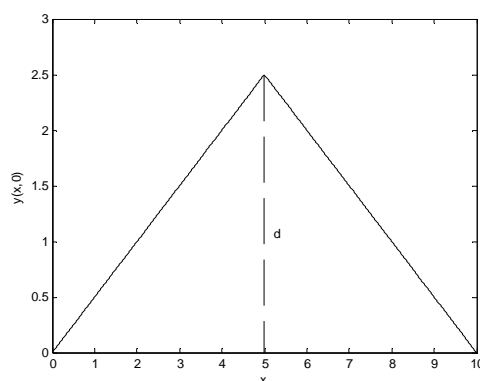


Figura 6. Posição inicial do fio

A equação do fio vibrante é

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

onde $y(x,t)$ representa o deslocamento do fio na direcção transversa do eixo dos xx no instante t . Como os extremos do fio estão fixos em $x = 0$ e $x = L$, vem

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad t > 0$$

E as condições iniciais deste problema são para a posição

$$y(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2dx}{L} & 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \frac{2d(L-x)}{L} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

e para a velocidade

$$\dot{y}(x,0) = 0$$

A resolução desta equação diferencial faz-se por separação de variáveis, sendo $y = XT$ e, portanto, $XT'' = a^2 X''T$ ou $T''/a^2 T = X''/X$. Designando $-\lambda^2$ a constante de separação, vem

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0 \quad X'' + \lambda^2 X = 0$$

e

$$T = A_1 \sin(\lambda at) + B_1 \cos(\lambda at) \quad X = A_2 \sin(\lambda x) + B_2 \cos(\lambda x)$$

pelo que a solução será

$$y(x,t) = [A_2 \sin(\lambda x) + B_2 \cos(\lambda x)][A_1 \sin(\lambda at) + B_1 \cos(\lambda at)]$$

De $y(0,t) = 0$ vem $B_2 = 0$ e

$$y(x,t) = \sin(\lambda x)[A \sin(\lambda at) + B \cos(\lambda at)]$$

De $y(L,t) = 0$ vem

$$\sin(\lambda L)[A \sin(\lambda at) + B \cos(\lambda at)] = 0$$

pelo que

$\sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda = m\pi / L$. Também de $\dot{y}(x,0) = 0$, vem que

$$\dot{y}(x,t) = \sin(\lambda x)[A\lambda a \cos(\lambda at) - B\lambda a \sin(\lambda at)]$$

é

$$\dot{y}(x,0) = \sin(\lambda x)(A\lambda a) = 0$$

pelo que $A = 0$ e a solução vem

$$y(x,t) = B \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi at}{L}$$

Para satisfazer a condição inicial $y(x,0) = f(x)$ é necessário usar uma sobreposição de soluções do tipo

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi at}{L}$$

e

$$y(x,0) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{L}$$

onde os coeficientes B_m são os coeficientes de uma expansão em série de Fourier com variável x em vez de t e correspondendo a um sinal de período $2L$ com simetria ímpar. Os coeficientes B_m vêm, então

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{2}{2L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(2\pi \frac{m}{2L} x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \\ &= \frac{2}{L} \left\{ \int_0^{L/2} \frac{2dx}{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^L \frac{2d(L-x)}{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right\} \\ &= \frac{8d}{\pi^2} \frac{\sin(m\pi/2)}{m^2} \end{aligned}$$

E o resultado final é

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8d}{\pi^2} \frac{\sin(m\pi/2)}{m^2} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi at}{L}$$

Os termos desta série representam os modos normais de vibração e a frequência do modo normal de ordem m , f_m , é obtida da expressão função do tempo, $\cos(m\pi at / L)$, sendo

$$2\pi f_m = \frac{m\pi a}{L} \quad f_m = \frac{ma}{2L} = \frac{m}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

onde τ é a tensão a que o fio está sujeito e ρ é a sua densidade linear.

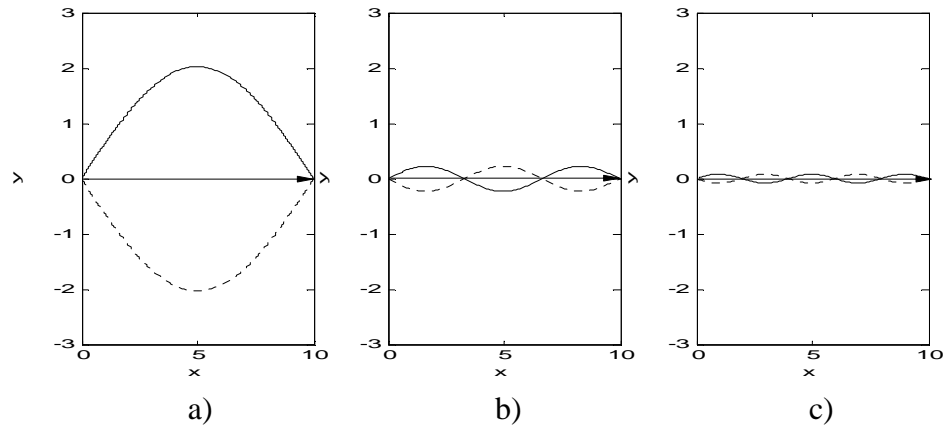


Figura 7. Modos normais de vibração nas frequências:
a) fundamental, b) 3º harmónico, c) 5º harmónico.

Podemos verificar na figura 7 cada um dos primeiros três modos de vibração. Com a evolução do tempo as formas destes modos de vibração vão variar, sucessivamente, entre as curvas a traço contínuo e as curvas a ponteados.

Problemas

1. Considere o sinal $x(t) = 6\sin(6\pi t) + 4\cos(9\pi t)$. No desenvolvimento em série de Fourier complexa deste sinal obtenha os coeficientes x_n .

2. Considere o sinal $x(t)$ periódico, de período $T = 10^{-5} s$, definido por

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{4} \\ 0 & \frac{T}{4} < t \leq \frac{3T}{4} \end{cases}. \text{ Represente este sinal por uma série de Fourier.}$$

3. Considere o sinal periódico, de período T , que no intervalo $0 < t < T$ é definido pela função $f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T/8 \\ 0 & T/8 < t \leq T \end{cases}$. Obtenha o coeficiente, x_n , do seu desenvolvimento em série complexa de Fourier em módulo e fase.

4. Considere o trem de impulsos de Dirac, $\delta_{T_0}(t)$, de período T_0 , definido por

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0). \text{ Obtenha a representação deste sinal por uma série de Fourier.}$$

5. Considere o sinal $x(t) = |\text{sent}|$. Obtenha a representação deste sinal por uma série de Fourier trigonométrica.

6. Obtenha uma representação por série de Fourier trigonométrica do sinal $x(t) = 2 + \pi|\text{sent}|$ a partir do resultado do problema 6.

7. Obtenha o desenvolvimento em série de Fourier de um sinal periódico de período

$$T = 2 \text{ s, que, no intervalo } [0, T] \text{ é representado por } f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 0,5 \\ -1 & 0,5 \leq t < 1,5 \\ 1 & 1,5 \leq t < 2 \end{cases}$$

8. Obtenha o desenvolvimento em série de Fourier de um sinal periódico de período

$$T = 2 \text{ s cuja expressão no intervalo } \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \text{ é dada por: } f(t) = \begin{cases} -t-1 & -1 \leq t < 0 \\ t & 0 \leq t < 1 \end{cases}.$$

9. Considere um sinal, $x(t)$, do qual sabe ser periódico com $\omega_0 = 1 \text{ rads}^{-1}$ e ter uma representação por uma série de Fourier cujos coeficientes não nulos são $x_{-5} = j$, $x_{-1} = j/4$, $x_1 = -j/4$ e $x_5 = -j$. Obtenha uma representação deste sinal por uma série de Fourier trigonométrica.

10. Considere um sinal, $x(t)$, do qual sabe que é periódico com $\omega_0 = 1 \text{ rads}^{-1}$ e tem uma representação por uma série de Fourier cujos coeficientes não nulos são $x_{-3} = j$, $x_{-1} = j/4$, $x_1 = -j/4$ e $x_3 = -j$. Obtenha uma expressão analítica simples deste sinal, correspondente à série trigonométrica de Fourier.

11. Considere um sinal periódico cuja frequência angular fundamental é $\omega_0 = 2 \text{ rads}^{-1}$. Este sinal tem um desenvolvimento em série de Fourier onde os coeficientes x_n são reais e estão representados no gráfico ao lado. Obtenha uma expressão para este sinal.

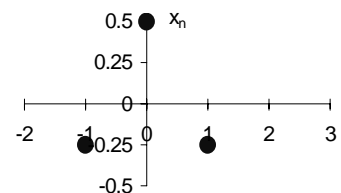


Figura P1. Gráfico de x_n

12. Considere um sinal periódico cuja frequência angular fundamental é $\omega_0 = 1 \text{ rads}^{-1}$. Este sinal tem um desenvolvimento em série de Fourier onde os coeficientes x_n são todos nulos com exceção de $x_{-3} = -1/2j$, $x_{-2} = 1/2$, $x_2 = 1/2$ e $x_3 = 1/2j$. Obtenha a representação deste sinal por uma série de Fourier trigonométrica.

13. Considere o sinal periódico, $x(t)$, de período T_0 tal que $x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T_0/2 \\ 0 & T_0/2 < t < T_0 \end{cases}$

cujo desenvolvimento em série de Fourier é $x(t) = \frac{A}{2} - j\frac{A}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\frac{2\pi}{T_0}t}$.

Obtenha, a partir desta expressão, uma representação por desenvolvimento em série de Fourier de $y(t)$, também de período T_0 , tal que $y(t) = \begin{cases} A & -T_0/4 < t < T_0/4 \\ 0 & T_0/4 < t < 3T_0/4 \end{cases}$.

14. Considere o sinal $x(t)$ do problema 3. Admita que este sinal passa num filtro passa banda ideal centrado na frequência 3×10^5 Hz e com uma largura de banda de 10^5 Hz. Obtenha uma representação do sinal, $y(t)$, à saída do filtro por uma série de Fourier.

15. Considere o trem de impulsos de Dirac do problema 5 com $T_0 = 10^{-4}$ s. Admita que este sinal passa num filtro passa banda ideal centrado na frequência 100 kHz e com uma largura de banda de 25 kHz. Obtenha uma representação do sinal, $y(t)$, à saída do filtro por uma série de Fourier.

16. Considere o sistema da figura onde o sinal de entrada tem um desenvolvimento em série de Fourier dado por $x(t) = 10^4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n 10^4 t}$ e o filtro é um filtro passa

banda ideal centrado na frequência 100 kHz e com uma largura de banda de 22 kHz. Obtenha a representação do sinal, $y(t)$, por uma série de Fourier, à saída do filtro.

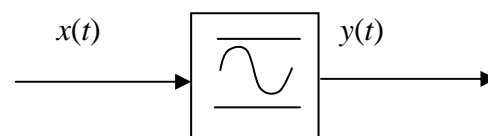


Figura P2. Sistema do problema 17

17. Considere o sinal $x(t)$ representado pela série de Fourier $x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos[2\pi(2n+1)10^3 t]$. Admita que este sinal passa num filtro passa

baixo ideal com $|H(f)| = \Pi\left(\frac{f}{4000}\right)$. Obtenha uma expressão para o sinal de saída, $y(t)$.

18. Considere o sinal $x(t)$, periódico de período $T_0 = 10^{-5}$ s, cuja representação por uma série de Fourier é dada por $x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos[2\pi(2n+1)10^5 t]$. Admita que este sinal passa num filtro com resposta em frequência $H(f)$ dado na figura. Obtenha uma expressão para o sinal à saída do filtro.

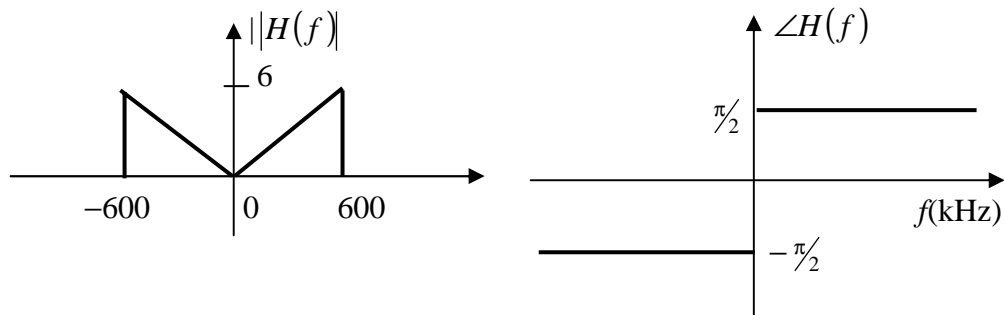


Figura P3. Resposta em frequência do sistema do problema 18

Transformada de Fourier

Introdução

Pretendemos alargar o tratamento da série de Fourier ao caso, mais geral de sinais arbitrários, ou seja sinais não periódicos.

Da série à transformada de Fourier

Consideremos, então, um sinal $x(t)$, não periódico e vamos efectuar uma expansão deste sinal que seja válida no intervalo $-T_0/2 < t \leq T_0/2$, onde T_0 é um valor arbitrário. Consideremos o sinal truncado

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t) & -T_0/2 < t \leq T_0/2 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

ou seja, um sinal que coincide com $x(t)$ no intervalo e é nulo fora dele e, a partir dele construamos o sinal periódico

$$x_{T_0}^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{T_0}(t - nT_0)$$

que também coincide com o sinal $x(t)$ no referido intervalo. Assim, uma representação do sinal periódico por uma série de Fourier também será uma representação válida do sinal $x(t)$ nesse intervalo. No desenvolvimento em série de Fourier os coeficiente são

$$\begin{aligned} x_n^p &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}^p(\tau) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} \tau} d\tau \end{aligned}$$

e

$$x(t) = x_{T_0}^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^p e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \quad -T_0/2 < t \leq T_0/2$$

ou

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} \tau} d\tau \right) e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

Fazendo $T_0 \rightarrow \infty$ podemos obter um expansão do sinal que seja válida para todos os valores de t . Deste modo, vamos fazer

$$f = \frac{n}{T_0} = nf_0$$

$$\Delta f = (n+1)f_0 - nf_0 = f_0 = \frac{1}{T_0}$$

e

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta f \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) e^{j2\pi ft}$$

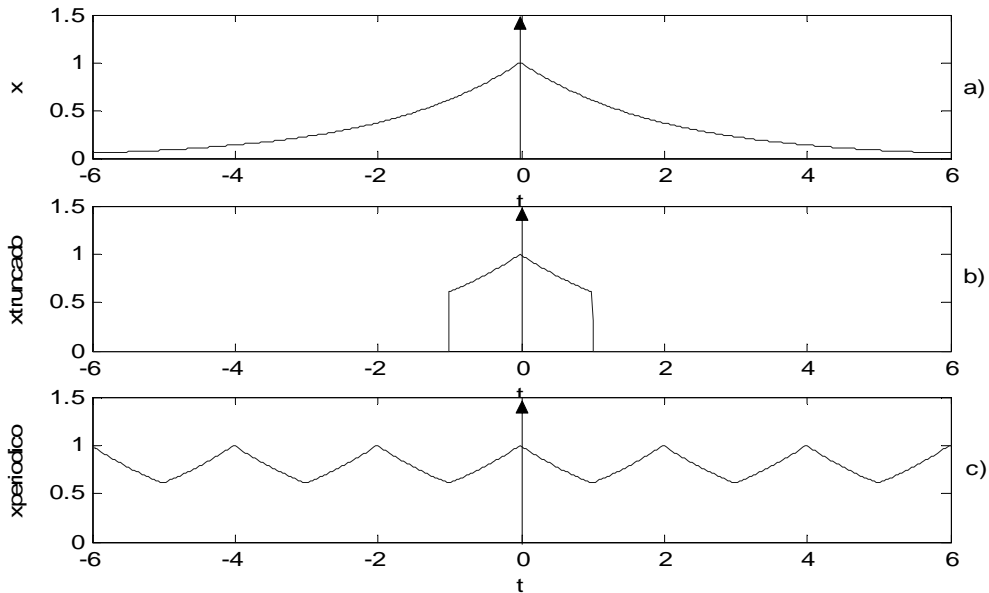


Figura 1. a) Sinal original, não periódico, b) sinal truncado e c) sinal periódico construído a partir de b).

Fazendo $T_0 \rightarrow \infty$ vem $f_0 \rightarrow 0$, $\Delta f \rightarrow 0$, o somatório tende para um integral e os limites do integral entre parêntesis tendem para infinito, pelo que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) e^{j2\pi ft} df$$

Define-se

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

e

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

o que é o equivalente do desenvolvimento em série de Fourier para sinais não periódicos. A função $X(f)$ é equivalente aos coeficientes $\{x_n\}$ no desenvolvimento em série de Fourier e fornece as componentes espectrais do sinal $x(t)$ em módulo e fase, que neste caso são funções contínuas de f e não discretas como no caso de sinais periódicos.

Teorema da transformada de Fourier

Seja $x(t)$ um sinal que satisfaz as condições^{**} seguintes

1. $x(t)$ é absolutamente integrável, i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. O número de máximos e mínimos de $x(t)$ em qualquer intervalo finito nos tempos é finito.
3. O número de descontinuidades de $x(t)$ em qualquer intervalo finito nos tempos é finito.

então a transformada de Fourier de $x(t)$ é dada por

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

e o sinal $x(t)$ pode obter-se a partir daquela por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$X(f)$ é uma função complexa designada de espectro do sinal $x(t)$ com amplitude $|X(f)|$ e fase $\angle X(f)$ que representam as componentes do sinal $x(t)$ às várias frequências. Representações comuns destes sinais são

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)]$$

onde $X(f)$ é a transformada de Fourier do sinal $x(t)$ e este é a transformada inversa de Fourier do sinal $X(f)$ ou ainda sob a forma de um par de transformadas

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

Se usarmos a frequência angular ω em vez de da frequência f , vem

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

e

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Das expressões da transformada de Fourier e da transformada inversa vem

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)} df \right) x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Por comparação com

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) x(\tau) d\tau$$

temos

^{**} Condições de Dirichlet.

$$\delta(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)} df$$

ou

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df$$

i.e., temos o primeiro par de transformadas

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

Exemplo 1.

A transformada de Fourier de $\Pi(t)$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Pi(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \frac{1}{-j2\pi f} \left[e^{-j\pi f} - e^{j\pi f} \right] = \frac{\text{sen}\pi f}{\pi f} = \text{senc}(f) \end{aligned}$$

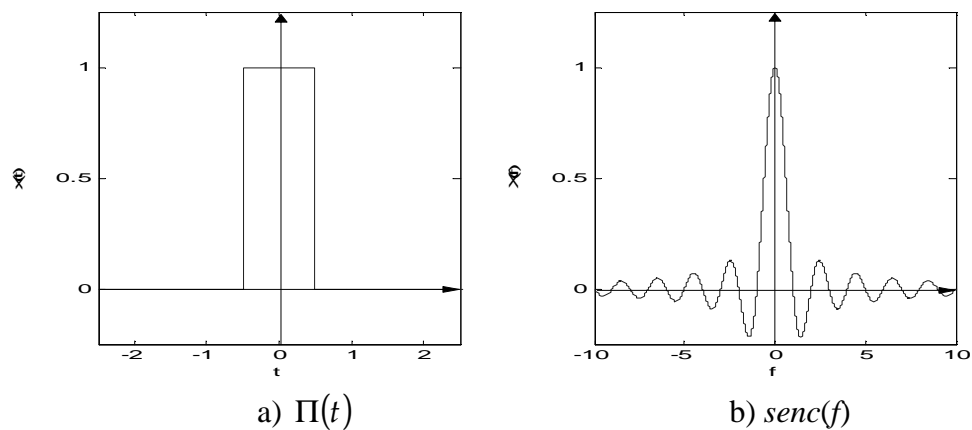


Figura 2. Par de transformadas $\Pi(t) \leftrightarrow \text{senc}(f)$

Propriedades da transformada de Fourier

- Linearidade

Sejam $x(t)$ e $y(t)$ sinais arbitrários, ambos com transformada de Fourier $X(f)$ e $Y(f)$. O sinal $z(t) = Ax(t) + By(t)$ também tem transformada de Fourier $Z(f)$ sendo

$$Z(f) = AX(f) + BY(f)$$

- Translação nos tempos

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Fourier $X(f)$. O sinal $y(t) = x(t - t_0)$ também tem transformada de Fourier. Assim

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

e

$$\begin{aligned} x(t-t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f(t-t_0)} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-j2\pi ft_0} X(f) \right] e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

pelo que

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)] = e^{-j2\pi ft_0} X(f)$$

Exemplo 2.

A transformada de Fourier de $x(t) = \Pi(t - 0,5)$ é

$$\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[\Pi(t)] e^{-j2\pi f \cdot 0,5} = \text{sinc}(f) e^{-j\pi f}$$

- Conjugação

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Fourier $X(f)$. O sinal $y(t) = x^*(t)$ também tem transformada de Fourier, sendo

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ X^*(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

ou, substituindo f por $-f$, vem

$$X^*(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

pelo que

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

Para sinais reais tem-se

$$x^*(t) = x(t)$$

e

$$X^*(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f)$$

ou seja

$$X^*(-f) = X(f)$$

e o sinal $X(f)$ tem simetria hermitiana, pelo que

$$\text{Re}[X(f)] = \text{Re}[X(-f)]$$

$$\text{Im}[X(f)] = -\text{Im}[X(-f)]$$

a sua parte real é par e a parte imaginária ímpar, ou

$$|X(f)| = |X(-f)|$$

$$\angle X(f) = -\angle X(-f)$$

o seu módulo é par e a sua fase ímpar.

Se o sinal além de real for par, *i.e.* $x(t) = x(-t)$, então

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = X(f)$$

sendo $X(f)$ par e real ($\text{Im}[X(f)] = 0$).

Se o sinal além de real for ímpar, *i.e.* $x(t) = -x(-t)$, então

$$X(-f) = -X(f)$$

sendo $X(f)$ ímpar e imaginário ($\text{Re}[X(f)] = 0$).

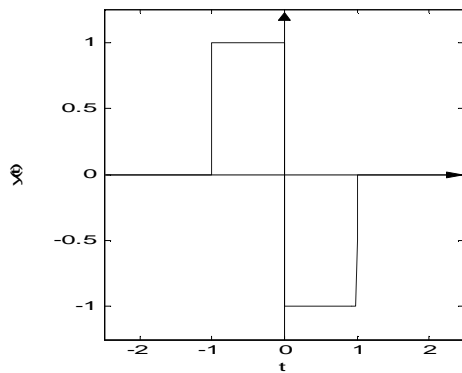
Exemplo 3.

O sinal $x(t) = \Pi(t)$, do exemplo 6, que é um sinal real e par, tem uma transformada de Fourier $X(f) = \text{senc}(f)$ que é um sinal par e real.

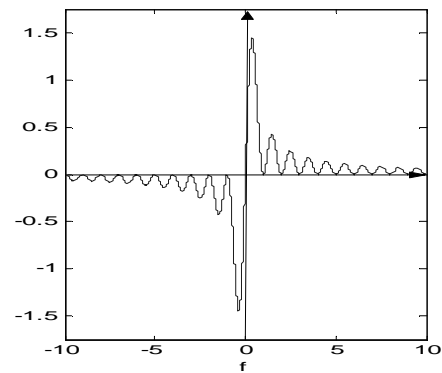
Calculemos a transformada do sinal $y(t) = \Pi(t + 0,5) - \Pi(t - 0,5)$, que é um sinal real e ímpar.

$$\begin{aligned} Y(f) &= \text{senc}(f) e^{j\pi f} - \text{senc}(f) e^{-j\pi f} = \\ &= j2\text{senc}(f) \frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{j2} = j2\text{senc}(f) \text{sen}(\pi f) \end{aligned}$$

O sinal $Y(f)$ é um sinal ímpar e imaginário.



a) $y(t) = \Pi(t + 0,5) - \Pi(t - 0,5)$



b) $Y(f) = j2\text{senc}(f) \text{sen}(\pi f)$

Figura 3. Par de transformadas $y(t) \leftrightarrow Y(f)$

- Diferenciação e integração

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Fourier $X(f)$. O sinal $dx(t)/dt$ também tem transformada de Fourier, sendo

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} [j2\pi f X(f)] e^{j2\pi ft} df$$

pelo que

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f X(f)$$

Também

$$> \left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$$

onde $X(0)$ é a componente contínua de $x(t)$.

Exemplo 4.

A transformada de Fourier do sinal $u(t)$ pode obter-se de $\int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda = u(t)$.

Sabendo que

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

vem, então

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$$

- Mudança de escala no tempo

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Fourier $X(f)$. O sinal $x(at)$ também tem transformada de Fourier, sendo

$$> [x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j2\pi f t} dt$$

E, fazendo uma mudança de variável, $\tau = at$, com $a \neq 0$, vem

$$> [x(at)] = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau/a} d\tau & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau/a} d\tau & a < 0 \end{cases}$$

pelo que

$$> [x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Exemplo 5.

A transformada de Fourier de $x(t) = \Pi(0,5 t)$ é

$$> [x(t)] = \frac{1}{0,5} \text{senc}\left(\frac{f}{0,5}\right) = 2 \text{senc}(2f)$$

Vemos que a transformada de Fourier de um sinal expandido no tempo se apresenta comprimida nas frequências e, *vice versa*, a transformada de Fourier de um sinal comprimido no tempo se apresenta expandida nas frequências.

- Dualidade

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Fourier $X(f)$. Então, o sinal $X(t)$ tem a seguinte transformada de Fourier

$$> [X(t)] = x(-f)$$

ou

$$> [X(-t)] = x(f)$$

Exemplo 6.

Pela dualidade temos do par de transformadas

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

que

$$1 \leftrightarrow \delta(f)$$

Também, de

$$\Pi(t) \leftrightarrow \text{senc}(f)$$

vem

$$\text{senc}(t) \leftrightarrow \Pi(f)$$

- Diferenciação nas frequências

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Fourier $X(f)$. A transformada inversa do sinal $dX(f)/df$ é

$$\frac{dX(f)}{df} = \int_{-\infty}^{\infty} -j2\pi t x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

pelo que

$$> [tx(t)] = \frac{j}{2\pi} \frac{dX(f)}{df}$$

Também

$$> [t^n x(t)] = \left(\frac{j}{2\pi} \right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f)$$

Exemplo 7.

Obtenha a transformada de Fourier de $x(t) = t$.

Tem-se

$$> [t] = > [t \times 1] = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} > [1] = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} \delta(f) = \frac{j}{2\pi} \delta'(f)$$

- Modulação ou translação nas frequências

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Fourier $X(f)$. O sinal cuja transformada de Fourier é $X(f-f_0)$ é

$$\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t} x(t)\} = X(f - f_0)$$

Exemplo 8.

Obtenha a transformada de Fourier de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

Tem-se

$$x(t) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$$

de $\mathcal{F}\{1\} = \delta(f)$, vem

$$X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

- Convolução

Sejam os sinais $x(t)$ e $h(t)$ com transformadas de Fourier $X(f)$ e $H(f)$. A transformada

de Fourier do sinal $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) h(\lambda) d\lambda$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) h(\lambda) d\lambda \right] e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) e^{-j2\pi f t} dt \right] d\lambda \end{aligned}$$

onde $\mathcal{F}\{x(t - \lambda)\} = e^{-j2\pi f \lambda} X(f)$, pelo que

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = X(f) \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j2\pi f \lambda} d\lambda = X(f) H(f)$$

Portanto

$$\mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = X(f) H(f)$$

Exemplo 9.

Obtenha a transformada de Fourier do sinal $\Lambda(t)$.

Sabemos que

$$\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$$

Então

$$\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = \mathcal{F}\{\Pi(t)\}^2 = \text{sinc}^2(f)$$

- Multiplicação

Sejam os sinais $x(t)$ e $y(t)$ com transformadas de Fourier $X(f)$ e $Y(f)$, respectivamente. A transformada de Fourier do sinal $x(t)y(t)$ é

$$\mathcal{F}[x(t)y(t)] = X(f) * Y(f)$$

Exemplo 10.

Considere o sinal $x(t)$ com transformada de Fourier $X(f)$. Determine a transformada do sinal produto

$$y(t) = x(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

Como

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t})$$

Vem

$$\mathcal{F}[\sin(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

e

$$\mathcal{F}[y(t)] = X(f) * \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

$$\mathcal{F}[y(t)] = \frac{1}{2j} [X(f - f_0) - X(f + f_0)]$$

- Relação de Parseval

Sejam os sinais $x(t)$ e $y(t)$ com transformadas de Fourier $X(f)$ e $Y(f)$. Assim

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(f') e^{j2\pi f' t} df' \right]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(f') e^{-j2\pi f' t} df' \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(f') \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(f-f')t} dt \right] df' \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(f') \delta(f - f') df' \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df \end{aligned}$$

Exemplo 11.

Usando esta propriedade calcule o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{senc}^3(t) dt$$

Como $\mathcal{F}[\Pi(t)] = \text{senc}(f)$ e $\mathcal{F}[\Lambda(t)] = \text{senc}^2(f)$, por dualidade tem-se $\mathcal{F}[\text{senc}(t)] = \Pi(f)$ e $\mathcal{F}[\text{senc}^2(t)] = \Lambda(f)$. Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{senc}^3(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(f) \Lambda(f) df = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

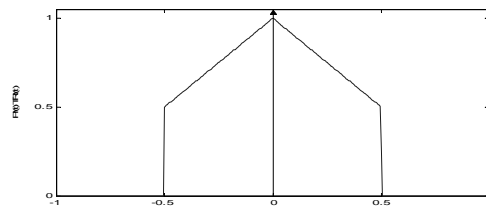


Figura 4. Sinal $\Pi(f)\Lambda(f)$

- Teorema de Rayleigh

Quando $y(t) = x(t)$ o resultado anterior vem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

- Autocorrelação

A função de autocorrelação do sinal $x(t)$, com transformadas de Fourier $X(f)$, é definida por

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt$$

e a sua transformada de Fourier vem

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = |X(f)|^2$$

é uma função real da frequência. É de notar que $R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$, pelo que a transformada se obtém aplicando o teorema da convolução.

- Momentos

O momento de ordem n do sinal $x(t)$, com transformadas de Fourier $X(f)$, é definido por

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n x(t) dt = \left(\frac{j}{2\pi} \right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f) \Big|_{f=0}$$

Tabela I – Pares de transformadas de Fourier

$x(t)$	$X(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f t_0}$	$\delta(f - f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]/2$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]/2j$
$\Pi(t)$	$\text{sinc}(f)$
$\Lambda(t)$	$\text{sinc}^2(f)$
$e^{-at}u(t), a > 0$	$1 / (a + j2\pi f)$
$te^{-at}u(t), a > 0$	$1 / (a + j2\pi f)^2$
$e^{-a t }$	$2a / [a^2 + (2\pi f)^2]$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$\text{sgn}(t)$	$1 / (j\pi f)$
$u(t)$	$[\delta(f) + 1 / (j\pi f)] / 2$
$\delta'(t)$	$j2\pi f$
$1 / t$	$-j\pi \text{sgn}(f)$
$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$

Para $n = 0$ vem

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0)$$

A tabela I fornece um conjunto de pares de transformadas de Fourier de sinais de uso mais corrente.

Transformada de Fourier de sinais periódicos

A tabela I fornece já algumas transformadas de sinais periódicos, como os sinais $e^{j2\pi f t_0}$, $\cos(2\pi f_0 t)$, $\sin(2\pi f_0 t)$ e $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_0)$. As transformadas destes sinais têm em comum serem todas constituídas por impulsos de Dirac no domínio das frequências.

Consideremos $x(t)$ um sinal periódico de período T_0 com uma expansão em série de Fourier de coeficientes $\{x_n\}$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

A sua transformada de Fourier vem

$$\mathcal{F}[x(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Então, de um modo geral, a transformada de Fourier de um sinal periódico consiste numa sequência de impulsos de Dirac para todos os múltiplos da frequência fundamental do sinal periódico e os pesos dos impulsos são os coeficientes $\{x_n\}$ da expansão em série de Fourier. A partir desta expressão é possível obter um novo método de cálculo dos coeficientes $\{x_n\}$. Consideremos de novo o sinal truncado

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t) & -T_0/2 < t \leq T_0/2 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

a partir do qual podemos exprimir $x(t)$ como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{T_0}(t - nT_0)$$

e, exprimindo $x_{T_0}(t - nT_0) = x_{T_0}(t) * \delta(t - nT_0)$, tem-se

$$x(t) = x_{T_0}(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

cuja transformada de Fourier é

$$X(f) = X_{T_0}(f) \left[\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \right]$$

ou

$$X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

e, por comparação com $\mathcal{F}[x(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$ tem-se que

$$x_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

Assim, para calcular os coeficientes $\{x_n\}$ é possível efectuar o seguinte procedimento

1. Obter o sinal truncado, $x_{T_0}(t)$.
2. Calcular a sua transformada de Fourier, $\mathcal{F}[x_{T_0}(t)]$.
3. Calcular o valor de $\mathcal{F}[x_{T_0}(t)]$ para $f = \frac{n}{T_0}$ e multiplicar por $\frac{1}{T_0}$.

Exemplo 12.

Aplique o método apresentado para obter os coeficientes do desenvolvimento

em série de Fourier do sinal $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_0}{\tau}\right)$ do exemplo 1.

1. O sinal truncado, é

$$x_{T_0}(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

2. A sua transformada de Fourier, é
- $$X_{T_0}(f) = \tau \operatorname{senc}(\tau f)$$

3. Pelo que x_n vem

$$x_n = \frac{\tau}{T_0} \operatorname{senc}\left(\frac{\tau n}{T_0}\right)$$

Passagem por SLIT

Vimos que a saída de um SLIT é igual à convolução do sinal de entrada e da resposta impulsional do sistema, o que no domínio das frequências é dado pelo produto das respectivas transformadas

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

onde $H(f)$ é a resposta em frequência do sistema. Esta também pode ser obtida do conhecimento dos sinais de entrada e de saída através da relação

$$H(f) = Y(f)/X(f)$$

onde $H(f) = |H(f)|e^{j\theta_H(f)}$, sendo $|H(f)|$ a sua resposta em amplitude, por vezes também designada de ganho do sistema, e $\theta_H(f)$ a sua resposta em fase. Dada a simplicidade daquela relação o procedimento mais expedito para obter o sinal de saída, $y(t)$, no domínio dos tempos será calcular as transformadas de Fourier de $x(t)$ e de $h(t)$, respectivamente $X(f)$ e $H(f)$, efectuar o seu produto, obtendo $Y(f)$, e calcular a transformada inversa de Fourier.

Exemplo 13.

Obtenha a resposta em frequência do circuito RC, sabendo que a relação entrada saída é dada por

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

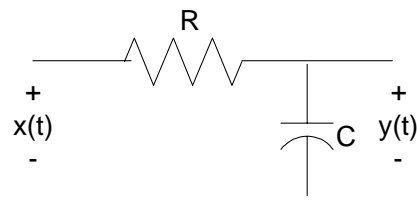


Figura 5. Circuito RC.

Calculando a transformada de Fourier desta equação tem-se

$$(j2\pi fRC + 1)Y(f) = X(f)$$

e

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \frac{1}{1 + j(f/f_0)}$$

onde $f_0 = 1 / 2\pi RC$ e as respostas em amplitude e fase são

$$|H(f)| = [1 + (f/f_0)^2]^{-1/2}$$

$$\theta_H(f) = -\arctg \frac{f}{f_0}$$

Exemplo.14.

Considere que o circuito RC do exemplo anterior tem à entrada o sinal $x(t) = Au(t)$ e obtenha uma expressão para o sinal de saída.

A transformada de Fourier de $x(t)$ é $X(f) = A[\delta(f) + 1 / (j\pi f)] / 2$ e a resposta em frequência do circuito RC é

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

pelo que

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{A}{2} \left[\delta(f) + \frac{1}{j\pi f} \right] \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \frac{A\delta(f)}{2} + \frac{A}{2} \frac{1}{j\pi f} \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \\ &= \frac{A\delta(f)}{2} + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{j\pi f} - \frac{2RC}{1 + j2\pi fRC} \right) = \frac{A}{2} \left[\delta(f) + \frac{1}{j\pi f} \right] - \frac{A}{(1/RC) + j2\pi f} \end{aligned}$$

e a sua transformada inversa $y(t)$ vem

$$y(t) = Au(t) - Ae^{-t/RC}u(t) = A(1 - e^{-t/RC})u(t)$$

Filtros ideais

Um filtro ideal é um sistema que apenas deixa passar sinais com componentes de frequência num dado intervalo no eixo das frequências e rejeita todas as outras componentes desses sinais. Os tipos mais comuns de filtros ideais são:

1. Filtro ideal passa baixo

O filtro ideal passa baixo tem uma resposta em amplitude e fase do tipo (Fig. 6)

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & |f| < W \\ 0 & |f| > W \end{cases} \quad \theta_H(f) = \begin{cases} -2\pi ft_0 & |f| < W \\ 0 & |f| > W \end{cases}$$

onde W é a frequência de corte do filtro e, também, a sua largura de banda.

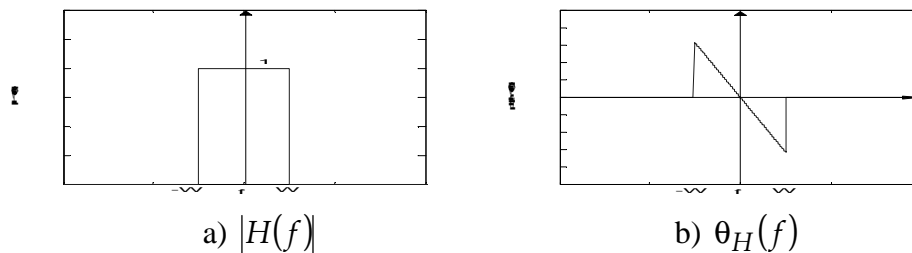


Figura 6. Resposta em amplitude e fase do filtro ideal passa baixo

2. Filtro ideal passa alto

O filtro ideal passa alto tem uma resposta em amplitude e fase do tipo (Fig. 7)

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & |f| < W \\ 1 & |f| > W \end{cases} \quad \theta_H(f) = \begin{cases} 0 & |f| < W \\ -2\pi ft_0 & |f| > W \end{cases}$$

para este filtro não é definida largura de banda.

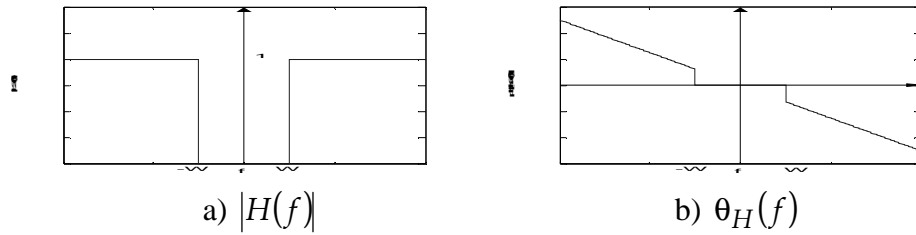


Figura 7. Resposta em amplitude e fase do filtro ideal passa alto

3. Filtro ideal passa banda

O filtro ideal passa banda tem uma resposta em amplitude e fase do tipo (Fig. 8)

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & W_1 < |f| < W_2 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases} \quad \theta_H(f) = \begin{cases} -2\pi ft_0 & W_1 < |f| < W_2 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Define-se largura de banda deste filtro como $LB = W_2 - W_1$.

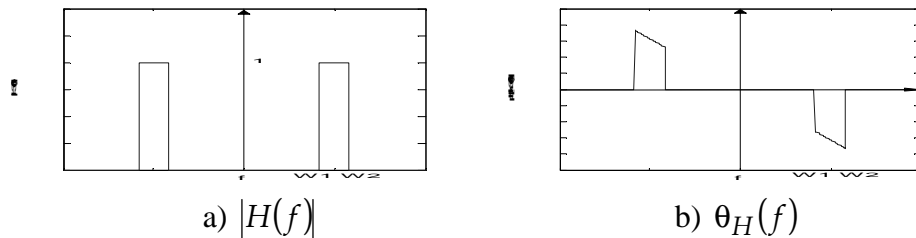


Figura 8. Resposta em amplitude e fase do filtro ideal passa banda

4. Filtro ideal stop banda ou tampão

O filtro ideal stop banda tem uma resposta em amplitude e fase do tipo (Fig. 9)

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & W_1 < |f| < W_2 \\ 1 & \text{outros valores} \end{cases} \quad \theta_H(f) = \begin{cases} 0 & W_1 < |f| < W_2 \\ -2\pi ft_0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

para este filtro não é definida largura de banda. Todos os filtros têm respostas em fase lineares, t_0 é uma constante, em f e, portanto, não introduzem distorção de fase.

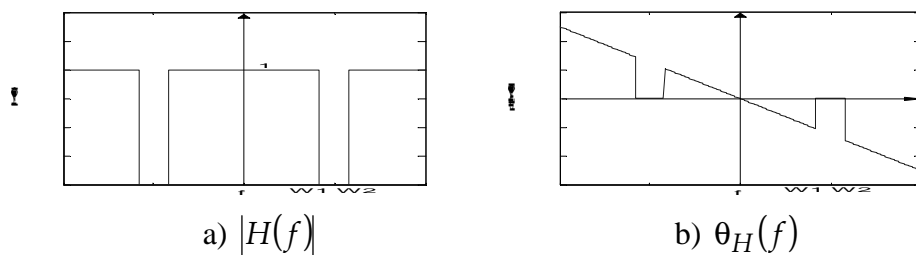


Figura 9. Resposta em amplitude e fase do filtro ideal stop banda

Constatamos, também, que todos os filtros ideais são sistemas não causais e consequentemente não realizáveis fisicamente.

Largura de banda e tempo de subida

Para filtros causais, como o filtro RC do exemplo anterior, define-se largura de banda a 3 dB, LB_{3dB} , como a gama de frequências em que a sua resposta em amplitude é

superior ao valor de $|H(f)|_{\text{máx}}/\sqrt{2}$, valor de metade da potência máxima do sistema. No caso de um filtro passa baixo a largura de banda corresponde ao intervalo entre zero e a frequência de metade da potência máxima do sistema, enquanto que para um filtro passa banda a largura de banda é a diferença entre as duas frequências para as quais o valor de $|H(f)|$ baixa para $|H(f)|_{\text{máx}}/\sqrt{2}$. É de salientar que todas as frequências aqui referidas são positivas.

Exemplo 15.

Para obter a largura de banda a 3 dB, $LB_{3\text{dB}}$, do circuito RC tem-se

$$|H(f)| = \left[1 + (f/f_0)^2\right]^{-1/2}$$

cujo máximo ocorre para $f = 0$, pelo que

$$\frac{|H(f)|_{\text{máx}}}{|H(f)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ocorre para $f = f_0 = 1 / 2\pi RC$ e a largura de banda a 3 dB é $LB_{3\text{dB}} = (2\pi RC)^{-1}$.

O tempo de subida de um sinal em degrau é o intervalo de tempo que decorre desde 10% até 90% do seu valor final. No caso do filtro RC passa baixo com um degrau unitário à entrada com tempo de subida nulo e amplitude A , tem, à saída, um sinal com amplitude A , mas com uma subida suave e, portanto, um tempo de subida finito. Da definição de tempo de subida, consideremos que 10% de A ocorre no instante t_m , tal como 90% de A ocorre no instante t_M , assim

$$A(1 - e^{-t_m/RC}) = 0.1A$$

ou

$$\frac{t_m}{RC} = -\ln(0.9)$$

e

$$A(1 - e^{-t_M/RC}) = 0.9A$$

ou

$$\frac{t_M}{RC} = -\ln(0.1)$$

Deste modo

$$T_R = T_M - T_m = RC[-\ln(0.1) + \ln(0.9)]$$

Em termos da largura de banda a 3 dB do filtro RC que é $LB_{3\text{dB}} = (2\pi RC)^{-1}$ temos

$$T_R = \frac{-\ln(0.1) + \ln(0.9)}{2\pi LB_{3\text{dB}}} = \frac{0.35}{LB_{3\text{dB}}}$$

Para um filtro passa baixo o tempo de subida é inversamente proporcional à sua largura de banda. Embora não seja aqui verificado a relação entre o tempo de subida e a largura de banda é sempre uma relação de proporcionalidade inversa. Outras definições podem ser consideradas quer de largura de banda quer de tempo de subida, sendo a relação de proporcionalidade inversa entre elas sempre verificada.

Problemas

1. Obtenha a transformada de Fourier em módulo e fase e faça a correspondente representação gráfica dos sinais:

a) $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

b) $x(t) = e^{-\alpha/t}$, $\alpha > 0$.

2. Determine as transformadas de Fourier dos seguintes sinais:

a) $x(t) = \frac{1}{2}\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$.

b) $x(t) = \cos(\pi t)$

c) $x(t) = \text{sen}(\pi t)$.

d) $\text{sgn}(t)$.

e) $x(t) = \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right)$.

f) $x(t) = \text{senc}^2(t)$.

g) $x(t) = 1/t$.

h) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$.

i) $x(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 1,5 & 2 \leq t \leq 3 \\ 1 & 3 < t \leq 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$

j) $x(t) = \Pi(t) \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi t) \right]$.

k) $x(t) = 2\text{senc}(t)\cos(2\pi f_0 t)$.

l) $x(t) = \cos(\pi t)\Pi(t)$.

3. Calcule e represente graficamente a transformada de Fourier de $y(t)$, sendo

$y(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{2}\right)$, quando $x(t) = \text{senc}^2(t)$.

4. Considere o sinal $x(t)$ com transformada de Fourier $X(f)$. Obtenha a transformada de Fourier do sinal $y(t) = x(t)e^{-j2\pi f_0 t}$.

5. Considere o sinal $x(t)$ com transformada de Fourier $X(f)$ como o sinal de entrada de um sistema de tal modo que a transformada de Fourier do sinal de saída é $Y(f) = j2\pi f X(f)$. Caracterize este sistema.

6. O sinal à entrada de um sistema linear e invariante no tempo é $x(t) = \text{senc}(\omega_1 t)$, sendo a resposta impulsional do sistema $h(t) = \text{senc}(\omega_2 t)$. Determine o sinal de saída quando $\omega_1 > \omega_2$.

7. Determine a transformada de Fourier do sinal $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$, sabendo que o sinal $x(t)$ tem por transformada de Fourier $X(f)$.

8. Calcule a transformada inversa de Fourier dos sinais:

a) $X(f) = 2\text{senc}(f) + \text{senc}(f - 1) + \text{senc}(f + 1)$.

b) $X(f) = \frac{1}{2} \left[\Pi(f - 10^5) + \Pi(f + 10^5) \right]$.

9. Considere um sistema com resposta em frequência $H(f) = (4 + j2\pi f)^{-1}$ que tem à entrada o sinal $x(t) = 50 \cos(3t)$. Obtenha uma expressão para o sinal de saída $y(t)$.

Transformada de Laplace

Introdução

Vimos, no estudo da análise de Fourier, a importância dos sinais exponenciais complexos como funções próprias dos SLIT. Um sinal pode assim ser representado como uma combinação linear de exponenciais complexas da forma $e^{j2\pi ft}$ ou $e^{j\omega t}$. No entanto, esta caracterização das exponenciais complexas como funções próprias dos SLIT ainda é válida para exponenciais da forma e^{st} , onde s não é necessariamente um imaginário puro da forma $s = j\omega$, mas pode tomar um valor complexo arbitrário.

Assim, ao passar de $s = j\omega$ para $s = \sigma + j\omega$ vamos generalizar a transformada de Fourier e definir a transformada de Laplace. Esta, tal como a transformada de Fourier, pode ser usada no estudo de sinais e de sistemas. No entanto, o seu contexto de aplicação é mais amplo permitindo, por exemplo, analisar as condições iniciais de um sistema e investigar as suas condições de estabilidade.

Da transformada de Fourier à de Laplace

No último parágrafo do capítulo 2 vimos que a resposta de um SLIT com resposta impulsional $h(t)$ a uma entrada exponencial complexa da forma e^{st} era

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

onde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

que representa a transformada de Fourier de $h(t)$, quando $s = j\omega$, e representa a transformada de Laplace de $h(t)$, quando $s = \sigma + j\omega$, i.e. uma variável complexa arbitrária com parte real e imaginária.

Define-se transformada de Laplace de um sinal $x(t)$ como

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

onde s é a variável complexa da forma $s = \sigma + j\omega$, com parte real σ e parte imaginária ω . Esta equação define o que se pode designar de transformada de Laplace bilateral em contraste com a transformada de Laplace unilateral que é definida como

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

onde $0^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (0 - \epsilon)$. As duas definições são equivalentes quando $x(t) = 0$ para $t < 0$.

No texto que segue vamos omitir a designação de bilateral, a menos que seja necessário discriminar a definição utilizada.

Assim, designa-se, genericamente

$$X(s) = \mathcal{D}\{x(t)\}$$

e representa o par $x(t)$ e $X(s)$ como

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

Pelo que vimos atrás podemos dizer que

$$X(s)\big|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Mas também podemos relacionar a transformada de Laplace com a de Fourier, fazendo $s = \sigma + j\omega$, vem

$$\begin{aligned} X(\sigma + j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

A transformada de Laplace de $x(t)$ pode ser interpretada como sendo a transformada de Fourier do sinal $x(t)e^{-\sigma t}$, *i.e.* $x(t)$ multiplicado por um sinal exponencial real.

Região de convergência da transformada de Laplace – ROC

Se a transformada de Laplace de $x(t)$ é equivalente à transformada de Fourier do sinal $x(t)e^{-\sigma t}$, então é necessário que sejam verificadas as condições de Dirichlet, em particular o sinal $x(t)e^{-\sigma t}$ deve ser absolutamente integrável, *i.e.*,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

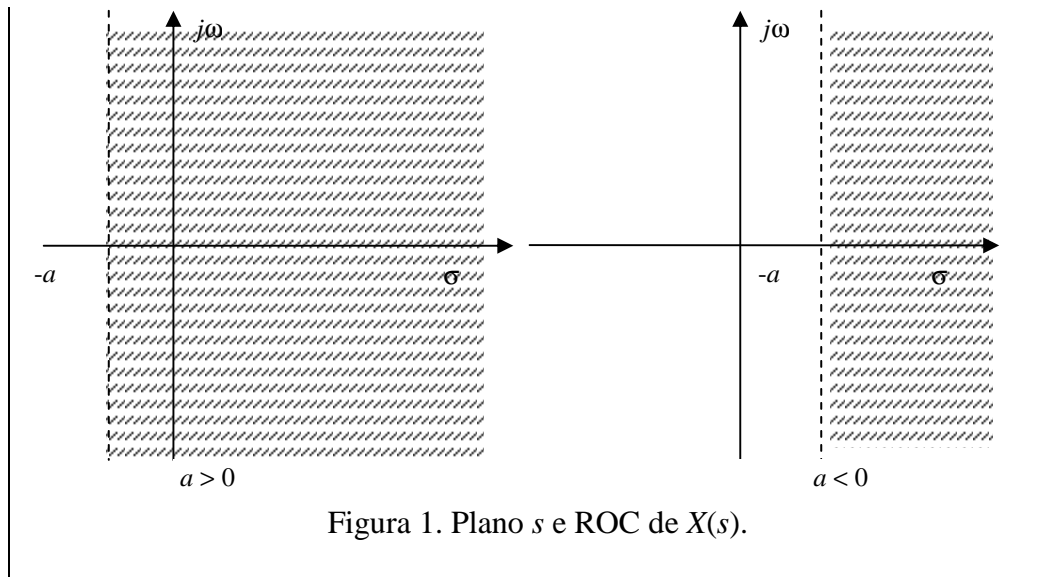
Assim, a gama de valores da variável complexa s para a qual a transformada de Laplace converge absolutamente designa-se de região de convergência da transformada de Laplace – ROC.

Exemplo 1.

Calcule a transformada de Laplace do sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$.

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[-\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) > -a \end{aligned}$$

uma vez que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+a)t} = 0$ se $\text{Re}(s+a) > 0$ ou $\text{Re}(s) > -a$. A ROC encontra-se representada na figura 1. Quando $a = 0$, $x(t)$ é o sinal degrau unitário e a sua transformada de Laplace é $X(s) = 1/s$, $\text{Re}(s) > 0$.

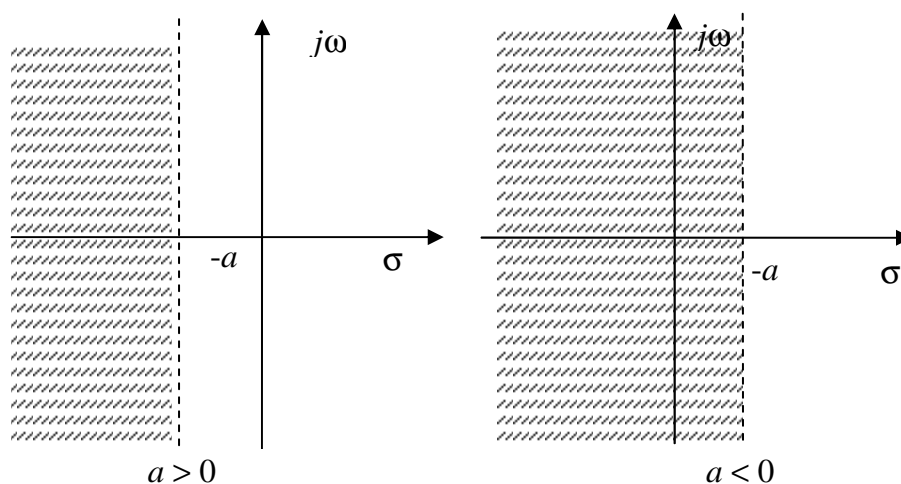


A figura 1 representa a região de convergência absoluta da transformada de Laplace do sinal $x(t)$ do exemplo 1 no plano complexo por uma área a tracejado à direita da recta $\sigma = -a$ e que não a inclui. Nas aplicações da transformada de Laplace é usual designar o plano complexo como plano s , o eixo real como eixo σ e o eixo imaginário como eixo $j\omega$, respectivamente.

Exemplo 2.

Calcule a transformada de Laplace do sinal $x(t) = -e^{-at}u(-t)$.

$$X(s) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(-t) e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) < -a$$



No exemplo 2 calculamos a transformada de Laplace do sinal $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, $a \in \mathbb{N}$, e verificamos que ela é igual à do exemplo 1, $X(s) = 1/(s+a)$, no entanto a sua região de convergência é diferente, sendo $\text{Re}(s) < -a$. Deste modo, para caracterizar completamente a transformada de Laplace de um sinal é necessário especificar a região de convergência absoluta como parte da transformada.

Pólos e zeros

De uma forma geral, a transformada de Laplace de um sinal é uma função racional de s , i.e. é a razão de dois polinómios em s

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \\ &= K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \end{aligned}$$

onde os coeficientes b_k e a_k são constantes e m e n são inteiros positivos. O sinal $X(s)$ designa-se de função racional própria se $n > m$ e de função racional imprópria se $n \leq m$. As raízes do polinómio numerador, $N(s)$, designam-se zeros, z_k , de $X(s)$ uma vez que $X(s)|_{s=z_k} = 0$. Analogamente, as raízes do polinómio denominador, $D(s)$,

designam-se pólos, p_k , de $X(s)$ uma vez que $X(s)|_{s=p_k} = \infty$. Obviamente, os pólos não pertencem à região de convergência absoluta de $X(s)$, pelo que estes estão, necessariamente fora da ROC de $X(s)$ ou, quando muito, na sua fronteira. Pólos e zeros, em conjunto, são designados de frequências críticas.

A transformada de Laplace de um sinal fica completamente especificada pelas suas frequências críticas a menos de um factor de escala K . Os pólos representam-se no plano complexo por \times 's e os zeros por \circ 's.

Exemplo 3.

$$\text{Considere } X(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+3)} \quad \text{Re}(s) > -1.$$

Os pólos de $X(s)$ são $p_1 = -1$ e $p_2 = -3$, e $z_1 = 0$ é o seu único zero e a sua representação no plano s está feita na figura 3.

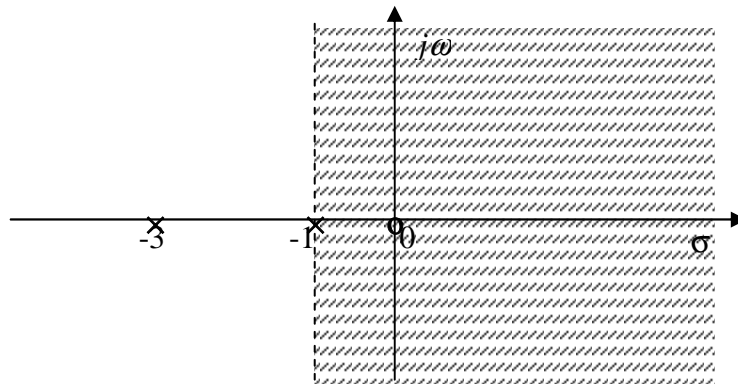


Figura 3. Representação da ROC de $X(s)$ e das suas frequências críticas.

Propriedades da região de convergência

Vimos como dois sinais muito diferentes têm transformadas de Laplace com expressões iguais, diferindo apenas nas respectivas regiões de convergência. Vamos, assim, enumerar um conjunto de propriedades da região de convergência, que a permitem desenhar a partir da expressão algébrica de $X(s)$ e do conhecimento de $x(t)$.

1. A ROC de $X(s)$ consiste em faixas paralelas ao eixo $j\omega$ no plano s .
Esta propriedade resulta da aplicação das condições de convergência de Dirichlet para que exista transformada de Fourier do sinal $x(t)e^{-\sigma t}$. Como vimos, nos exemplos 1 e 2, esta condição apenas depende de σ .
2. Para transformadas de Laplace que sejam funções racionais de s , a ROC não contém pólos.
 $X(s)$ é infinita nos pólos e, portanto, a condição de convergência não é satisfeita.
3. Se $x(t)$ é um sinal de duração finita, i.e. $x(t) \neq 0$ em $t_1 \leq t \leq t_2$, e $x(t) = 0$ em $t < t_1$ e $t > t_2$, então a ROC é todo o plano s , excepto, eventualmente, $s = 0$ ou $s = \infty$.

De novo, por comparação com o cálculo dos exemplos 1 e 2, é fácil verificar que o cálculo do integral de Laplace se faz entre os limites t_1 e t_2 , uma vez que o sinal $x(t)$ é nulo fora deste intervalo e, portanto, não há restrições a satisfazer.

Exemplo 4.

Calcule a transformada de Laplace do sinal

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

$$X(s) = \int_0^T e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^T = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad \forall s$$

A ROC é todo o plano complexo. A expressão da transformada de Laplace é indeterminada na origem. Levantando essa indeterminação o valor obtido é T .

Exemplo 5.

Calcule a transformada de Laplace do sinal $x(t) = \delta(t)$.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \quad \forall s$$

4. Se $x(t)$ é um sinal do lado direito, i.e. $x(t) = 0$ para $t < t_1$ com $t_1 < \infty$, então a ROC é da forma

$$\operatorname{Re}(s) > \sigma_{\max}$$

e a ROC designa-se de semi - plano direito. Neste caso σ_{\max} é o máximo valor das partes reais dos pólos de $X(s)$ e, portanto, o semi - plano à direita da linha vertical $\operatorname{Re}(s) = \sigma_{\max}$ no plano s é a ROC que não contém nenhum pólo de $X(s)$.

5. Se $x(t)$ é um sinal do lado esquerdo, i.e. $x(t) = 0$ para $t > t_2$ com $t_2 > -\infty$, então a ROC é da forma

$$\operatorname{Re}(s) < \sigma_{\min}$$

e a ROC designa-se de semi - plano esquerdo. Neste caso σ_{\min} é o mínimo valor das partes reais dos pólos de $X(s)$ e, portanto, o semi - plano à esquerda da linha vertical $\operatorname{Re}(s) = \sigma_{\min}$ no plano s é a ROC que não contém nenhum pólo de $X(s)$.

6. Se $x(t)$ é um sinal dos dois lados, i.e. é um sinal de duração infinita que não do lado direito nem do lado esquerdo, então a ROC é da forma

$$\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2$$

onde σ_1 e σ_2 são as partes reais de dois pólos de $X(s)$ e a ROC é uma faixa vertical no plano s entre as linhas verticais $\operatorname{Re}(s) = \sigma_1$ e $\operatorname{Re}(s) = \sigma_2$.

Exemplo 6.

Calcule a transformada de Laplace do sinal $x(t) = e^{-a|t|}$

Este sinal pode escrever-se $x(t) = e^{-at} u(t) + e^{at} u(-t)$, pelo que

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \\
&= \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_0^{\infty} = \\
&= -\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) < a \text{ e } \text{Re}(s) > -a \\
&= \frac{-2a}{s^2 - a^2} \quad -a < \text{Re}(s) < a
\end{aligned}$$

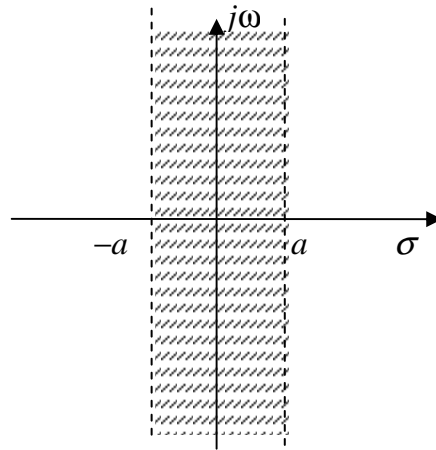


Figura 4. Representação da ROC de $X(s)$

Resultado que só é legítimo para $a > 0$, uma vez que para $a < 0$ a região de convergência é o conjunto vazio e, portanto, não há transformada de Laplace.

Propriedades da transformada de Laplace

- Linearidade

Sejam $x(t)$ e $y(t)$ sinais arbitrários, ambos com transformadas de Laplace $X(s)$ e $Y(s)$, sendo

$$\begin{aligned}
x(t) &\leftrightarrow X(s) & \text{ROC} &= R_1 \\
y(t) &\leftrightarrow Y(s) & \text{ROC} &= R_2
\end{aligned}$$

O sinal $z(t) = Ax(t) + By(t)$ também tem transformada de Laplace $Z(s)$ sendo

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \leftrightarrow Z(s) = AX(s) + BY(s) \quad R \supset R_1 \cap R_2$$

i.e., a região de convergência R contém a intersecção de R_1 e de R_2 . É de realçar que, quando a intersecção de R_1 e de R_2 é o conjunto vazio, então não existe transformada de Laplace. Também pode acontecer, eventualmente, que a região de convergência seja maior que a intersecção de R_1 e de R_2 , por exemplo, se houver uma simplificação pólo - zero.

Exemplo 7.

Calcule a transformada de Laplace do sinal $x(t) = e^{-t} \cos(3t)u(t)$

Este sinal pode escrever-se $x(t) = \frac{1}{2} [e^{-(1+j3)t} + e^{-(1-j3)t}] u(t)$, pelo que se tem, fazendo $a = 1 \pm j3$ no exemplo 1,

$$e^{-(1+j3)t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+(1+j3)} \quad \text{Re}(s) > -1$$

$$e^{-(1-j3)t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+(1-j3)} \quad \text{Re}(s) > -1$$

e $X(s)$ vem

$$X(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s+(1+j3)} + \frac{1}{s+(1-j3)} \right] \quad \text{Re}(s) > -1$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} \quad \text{Re}(s) > -1$$

- Translação nos tempos

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Laplace $X(s)$, sendo

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC} = R_1$$

O sinal $x(t - t_0)$ também tem transformada de Laplace, sendo

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s) \quad R = R_1$$

Por definição tem-se

$$\mathcal{D}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} X(s)$$

A multiplicação por e^{-st_0} não vai alterar os pólos de $X(s)$, pelo que as respectivas regiões de convergência coincidem.

Exemplo 8.

O sinal do exemplo 4 pode escrever-se como

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases} = u(t) - u(t - T)$$

e a sua transformada de Laplace vem

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad \forall s$$

A ROC é todo o plano complexo, uma vez que o sinal $x(t)$ é um sinal de duração finita.

- Translação no domínio dos complexos

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Laplace $X(s)$, sendo

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC} = R_1$$

então

$$e^{s_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s - s_0) \quad R = R_1 + \text{Re}(s_0)$$

onde a ROC de $X(s - s_0)$ é igual à de $X(s)$ também deslocada de $Re(s_0)$. Um caso especial desta propriedade ocorre para $s_0 = j\omega_0$, sendo

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s - j\omega_0) \quad R = R_1$$

Embora os pólos sejam deslocados de $j\omega_0$, a região de convergência não vem modificada por só depender da parte real destes.

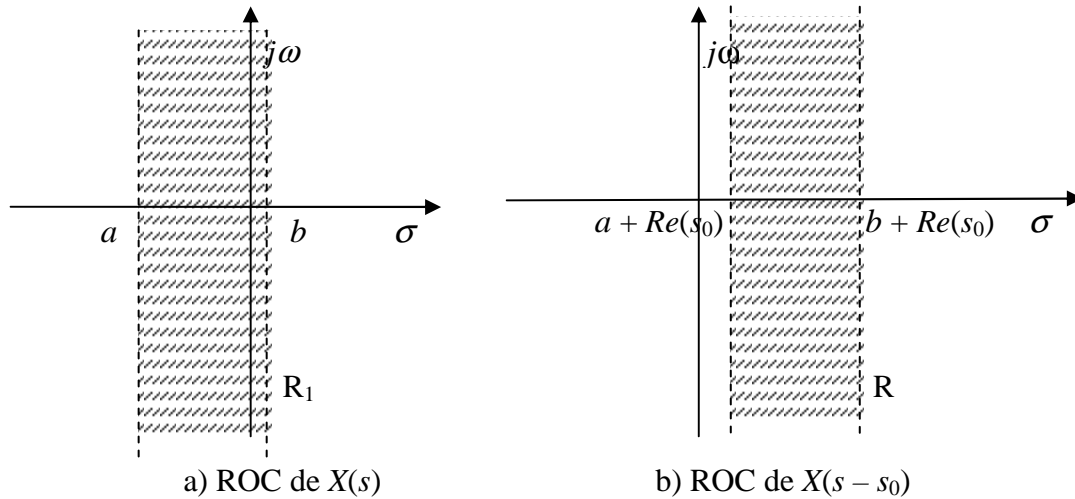


Figura 5. Translação da região de convergência em s

Exemplo 9.

Calcule a transformada de Laplace de $x(t) = \cos(3t)u(t)$.

Considere o par de transformadas de Laplace do exemplo 7.

$$e^{-t} \cos(3t)u(t) \leftrightarrow \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} \quad Re(s) > -1$$

Temos que

$$x(t) = e^t \left[e^{-t} \cos(3t)u(t) \right]$$

pelo que

$$X(s) = \frac{(s-1)+1}{[(s-1)+1]^2 + 9} \quad Re(s) > (-1+1)$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 9} \quad Re(s) > 0$$

- Mudança de escala nos tempos

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Laplace $X(s)$, sendo

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad ROC = R_1$$

então

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad R = a R_1$$

Por definição tem-se

$$D\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-st} dt = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-(s/a)\tau} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-(s/a)\tau} d\tau = -\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

$$D\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad R = a R_1$$

onde a ROC da transformada de $x(at)$ também vem afectada pela mudança de escala nos complexos, sendo a nova região de convergência dada por aR_1 .

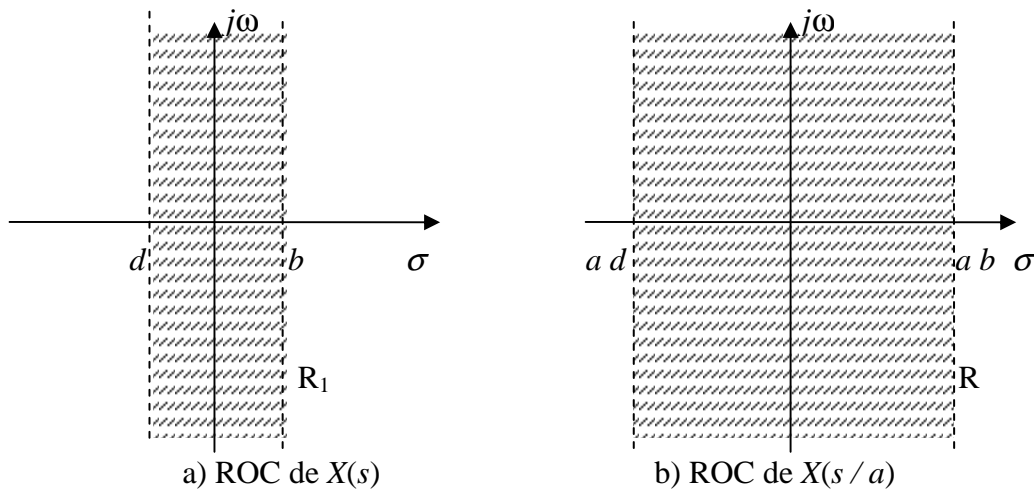


Figura 6. Efeito de mudança de escala da região de convergência em s

Exemplo 10.

Calcule a transformada de Laplace do sinal $z(t) = e^{-|t|}$.

Este sinal pode escrever-se em termos do sinal do exemplo 6 substituindo a por 1 ou fazendo $z(t) = x(t/a)$, pelo que, de

$$x(t) = e^{-a|t|} \leftrightarrow X(s) = \frac{-2a}{s^2 - a^2} \quad -a < \text{Re}(s) < a$$

vem, aplicando a propriedade da mudança de escala,

$$z(t) = e^{-|t|} \leftrightarrow Z(s) = a \frac{-2a}{(as)^2 - a^2} \quad -a < \text{Re}(as) < a$$

e, como a é real,

$$Z(s) = \frac{-2}{s^2 - 1} \quad -1 < \text{Re}(s) < 1$$

- Inversão nos tempos

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Laplace $X(s)$, sendo

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC} = R_1$$

então

$$x(-t) \leftrightarrow X(-s) \quad R = -R_1$$

Esta propriedade resulta da anterior quando se faz $a = -1$. A inversão no tempo de $x(t)$ produz uma inversão do plano s , quer do eixo σ quer do eixo $j\omega$.

Exemplo 11.

Calcule a transformada de Laplace de $x(t) = u(-t)$.

Do exemplo 1 sabemos que

$$u(t) \leftrightarrow 1/s \quad \text{Re}(s) > 0$$

pelo que

$$u(-t) \leftrightarrow -1/s \quad \text{Re}(s) < 0$$

- Conjugação

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Laplace $X(s)$, sendo

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC} = R_1$$

então

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(s^*) \quad R = R_1$$

Se $x(t)$ for real, então $X(s) = X^*(s^*)$, i.e., se $X(s)$ tiver um pólo ou um zero em s_0 então também tem um pólo ou um zero em s_0^* .

Exemplo 12.

Esta propriedade é facilmente verificada no exemplo 7 onde vimos

$$e^{-t} \cos(3t)u(t) \leftrightarrow \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} \quad \text{Re}(s) > -1$$

onde os pólos são $s_{1,2} = (-1 \pm j\sqrt{39})/2$ e o zero é $z = -1$ e no exemplo 9,

$$\cos(3t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + 9} \quad \text{Re}(s) > 0$$

onde os pólos são $s_{1,2} = \pm j3$ e o zero é $z = 0$.

- Convolução

Sejam $x(t)$ e $y(t)$ sinais arbitrários, ambos com transformadas de Laplace $X(s)$ e $Y(s)$, sendo

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC} = R_1$$

$$y(t) \leftrightarrow Y(s) \quad \text{ROC} = R_2$$

então

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s)Y(s) \quad R \supset R_1 \cap R_2$$

Com efeito, do integral de convolução

$$x^c(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)y(t-\lambda)d\lambda$$

vem

$$\begin{aligned} D\{x(t) * y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)y(t-\lambda)d\lambda \right] e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\lambda)e^{-st} dt \right] d\lambda \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-s\lambda} d\lambda \right] Y(s) \\ &= X(s)Y(s) \end{aligned}$$

Também aqui, a região de convergência R contém a intersecção de R_1 e de R_2 .

Exemplo 13.

Calcule a transformada de Laplace do sinal $x(t)*y(t)$ onde $x(t)=3e^{-2t}u(t)$ e $y(t)=2e^{-3t}u(t)$.

Temos

$$X(s)Y(s) = \frac{3}{(s+2)} \frac{2}{(s+3)} \quad Re(s) > -2 \cap Re(s) > -3$$

pelo que

$$X(s)Y(s) = \frac{6}{s^2 + 5s + 6} \quad Re(s) > -2$$

- Diferenciação nos tempos

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Laplace $X(s)$, sendo

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC} = R_1$$

então

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) \quad R \supset R_1$$

A partir da transformada inversa[†]

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s)e^{st} ds$$

tem-se

[†] Ver parágrafo seguinte.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} sX(s)e^{st} ds$$

E, também se tem $R = R_1$ a menos que ocorra uma simplificação pólo – zero em $s = 0$.

Exemplo 14.

Calcule a transformada de Laplace de $\delta'(t)$.

De

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad \forall s$$

vem

$$\delta'(t) \leftrightarrow s \quad \forall s$$

- Integração nos tempos

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Laplace $X(s)$, sendo

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC} = R_1$$

então

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) \quad R \supset R_1 \cap \{Re(s) > 0\}$$

Como

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

e

$$u(t) \leftrightarrow 1/s$$

então

$$x(t) * u(t) \leftrightarrow X(s) / s$$

A forma de R resulta da eventual introdução de um pólo adicional em $s = 0$, devido à multiplicação por s^{-1} .

Exemplo 15.

Esta propriedade é facilmente verificada de

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad \forall s$$

$$u(t) \leftrightarrow 1/s \quad Re(s) > 0$$

uma vez que

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

- Diferenciação nos complexos

Seja o sinal $x(t)$ com transformada de Laplace $X(s)$, sendo

então

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC} = R_1$$

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad R = R_1$$

De

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

tem-se

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} -tx(t)e^{-st} dt$$

o que verifica o resultado.

Exemplo 16.

Calcule a transformada de Laplace do sinal $x(t) = te^{-at}u(t)$, $a \in \mathbb{N}$.

Do exemplo 1 sabemos que

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) > -a$$

pelo que

$$-te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right) \quad \text{Re}(s) > -a$$

$$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{Re}(s) > -a$$

- Teoremas do valor inicial e do valor final

Considere o sinal $x(t)$ com transformada de Laplace $X(s)$, sendo $x(t) = 0$ para $t < 0$ e sabendo que $x(t)$ não contém impulsos nem outras singularidades de ordem superior na origem ($t = 0$), então, a partir da transformada de Laplace, pode obter-se:

1. o valor inicial de $x(t)$, i.e. o limite de $x(t)$ quando t tende para zero à direita, é

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

2. o valor final de $x(t)$, i.e. o limite de $x(t)$ quando t tende para infinito, é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

Exemplo 17.

Considere o par de transformadas do exemplo 7

$$e^{-t} \cos(3t)u(t) \leftrightarrow \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} \quad \text{Re}(s) > -1$$

O valor inicial é $e^{-0} \cos(0)u(0) = 1$, que pode ser verificado por

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s+1)}{(s+1)^2 + 9} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + s}{s^2 + 2s + 10} = 1$$

e o valor final é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + s}{s^2 + 2s + 10} = 0$$

As propriedades da transformada de Laplace encontram-se resumidas na tabela I. A representação de um conjunto de pares de transformadas, com a respectiva região de convergência, de sinais usuais está feita na tabela II.

A transformada inversa de Laplace

Vimos já que a transformada de Laplace pode ser interpretada em termos da transformada de Fourier, como

Tabela I - Propriedades da Transformada de Laplace

Propriedade	Sinal	Transformada	ROC
	$x(t)$ $y(t)$	$X(s)$ $Y(s)$	R_1 R_2
Linearidade	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$R \supset R_1 \cap R_2$
Translação em t	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	$R = R_1$
Translação em s	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$R = R_1 + Re(s_0)$
Mudança de escala	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$R = aR_1$
Inversão em t	$x(-t)$	$X(-s)$	$R = -R_1$
Conjugação	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	$R = R_1$
Convolução	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supset R_1 \cap R_2$
Diferenciação em t	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supset R_1$
Integração em t	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$R \supset R_1 \cap \{Re(s) > 0\}$
Diferenciação em s	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	$R = R_1$
<p>Teoremas do valor inicial e final</p> <p>Para $x(t)$ causal e sem impulsos nem outras singularidades na origem tem-se:</p> $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$			

$$X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

para valores de $s = \sigma + j\omega$ na região de convergência de $X(s)$. Assim, se calcularmos a transformada inversa de Fourier vem

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

ou

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

então é possível recuperar $x(t)$ a partir da sua transformada de Laplace calculada para um conjunto de pontos $s = \sigma + j\omega$ na região de convergência, com σ fixo e ω a variar entre $-\infty$ e $+\infty$. Por conveniência, vamos fazer a mudança de variável de ω para s , sendo $ds = jd\omega$, uma vez que σ é constante, e

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} X(s) e^{st} ds$$

Tabela II - Pares de transformadas de Laplace

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$\delta(t)$	1	$\forall s$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) < 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$Re(s) > 0$
$t^K u(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$Re(s) > 0$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s) > -Re(a)$
$-e^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s) < -Re(a)$
$te^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$Re(s) > -Re(a)$
$-te^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$Re(s) < -Re(a)$
$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$Re(s) > 0$
$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$Re(s) > 0$
$e^{-at} \cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$Re(s) > -Re(a)$
$e^{-at} \sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$Re(s) > -Re(a)$

Esta equação representa $x(t)$ como um integral pesado de exponenciais complexas. O contorno de integração é uma linha recta no plano complexo, paralela ao eixo $j\omega$ tal que $Re\{s\} = \sigma$. Pode escolher-se qualquer linha nestas condições, ou qualquer valor de σ desde que esteja contido na região de convergência.

Alternativamente ao cálculo da transformada inversa de Laplace pode recorrer-se ao uso de tabelas de pares de transformadas e à aplicação das suas propriedades e, no caso da transformada de Laplace ser uma função racional, efectuar uma expansão em fracções simples, *i.e.* fazer uma expansão da fracção racional numa combinação linear de fracções de ordem mais baixa.

Se considerarmos $X(s)$ como

$$X(s) = a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s) + \dots + a_n X_n(s)$$

e $X_1(s), X_2(s), \dots, X_n(s)$ tiverem transformadas inversas de Laplace $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, respectivamente, então, por linearidade, vem

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots + a_n x_n(t)$$

Desenvolvimento em fracções parciais

Se $X(s)$ é uma fracção racional da forma

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)}$$

podemos fazer uma expansão em fracções parciais, quer pelo método do denominador comum quer pelo método de expansão de Heaviside, sendo o último método o mais expedito. Pelo teorema da expansão de Heaviside vem:

1. $X(s)$ é uma função racional própria, *i.e.* $m < n$

- Pólos simples

Se todos os zeros do denominador forem distintos, então

$$X(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \dots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

onde os coeficientes c_k são

$$c_k = (s - p_k) X(s) \Big|_{s=p_k}$$

Exemplo 18.

Obtenha a transformada inversa de

$$X(s) = \frac{10}{s^2 + 10s + 16} \quad Re(s) > -2$$

Os zeros do denominador são $s = -2$ e $s = -8$, pelo que

$$X(s) = \frac{10}{(s + 2)(s + 8)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 8}$$

Pelo método de expansão de Heaviside vem

$$A = \frac{10(s + 2)}{(s + 2)(s + 8)} \Big|_{s=-2} = \frac{5}{3}$$

$$B = \frac{10(s+8)}{(s+2)(s+8)} \Big|_{s=-8} = -\frac{5}{3}$$

Então

$$X(s) = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+8} \right)$$

e

$$x(t) = \frac{5}{3} (e^{-2t} - e^{-8t}) u(t)$$

Alternativamente pode usar-se o método do denominador comum, sendo

$$10 = A(s+8) + B(s+2)$$

$$10 = (A+B)s + 8A + 2B$$

e

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 8A+2B=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5/3 \\ B=-5/3 \end{cases}$$

- **Pólos múltiplos**

Se $D(s)$ tem raízes múltiplas, *i.e.*, contém factores do tipo $(s-p_i)^r$, diz-se que p_i é um pólo múltiplo de $X(s)$ com multiplicidade r . Então, a expansão de $X(s)$ contém termos da forma

$$\frac{\lambda_1}{s-p_i} + \frac{\lambda_2}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(s-p_i)^r}$$

onde

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [(s-p_i)^r X(s)] \Big|_{s=p_i}$$

Exemplo 19.

Obtenha a transformada inversa de

$$X(s) = \frac{10s}{(s+2)^2(s+8)} \quad \text{Re}(s) > -2$$

A expansão em fracções parciais dá

$$X(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+8}$$

Pelo método de expansão de Heaviside vem

$$C = \frac{10s(s+8)}{(s+2)^2(s+8)} \Big|_{s=-8} = -\frac{20}{9}$$

$$B = \frac{10s(s+2)^2}{(s+2)^2(s+8)} \Big|_{s=-2} = -\frac{10}{3}$$

$$A = \frac{d}{ds} \left[\frac{10s(s+2)^2}{(s+2)^2(s+8)} \right] \bigg|_{s=-2} = \frac{10(s+8)-10s}{(s+8)^2} \bigg|_{s=-2} = \frac{20}{9}$$

Então

$$X(s) = \frac{20}{9} \left[\frac{1}{s+2} - \frac{3/2}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+8} \right]$$

e

$$x(t) = \frac{20}{9} \left(e^{-2t} - \frac{3}{2} t e^{-2t} - e^{-8t} \right) u(t)$$

Alternativamente pode usar-se o método do denominador comum, sendo

$$\begin{aligned} 10s &= A(s+2)(s+8) + B(s+8) + C(s+2)^2 \\ &= A(s^2 + 10s + 16) + B(s+8) + C(s^2 + 4s + 4) \\ &= (A+C)s^2 + (10A+B+4C)s + (16A+8B+4C) \end{aligned}$$

e

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 10A+B+4C=10 \\ 16A+8B+4C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=20/9 \\ B=-10/3 \\ C=-20/9 \end{cases}$$

No último exemplo o método do denominador comum é já bastante mais complexo que o método de expansão de Heaviside.

2. $X(s)$ é uma função racional imprópria, *i.e.* $m \geq n$

Quando $m \geq n$ então

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$$

onde $N(s)$ e $D(s)$ são os polinómios numerador e denominador de $X(s)$, o polinómio quociente $Q(s)$ é um polinómio de grau $m-n$, e o resto $R(s)$ é um polinómio de grau menor do que n .

A transformada inversa de $X(s)$ obtém-se a partir das transformadas inversas de $Q(s)$ e de $R(s)/D(s)$. Esta última fracção é própria e pode ter o procedimento descrito atrás. A transformada inversa de $Q(s)$ pode ser calculada usando o par de transformadas

$$\frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \leftrightarrow s^k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Exemplo 20.

Obtenha a transformada inversa de

$$X(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad \text{Re}(s) > -1$$

A fracção pode ser escrita

sendo

$$X(s) = 1 + \frac{1}{s+1}$$

$$x(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$$

A transformada unilateral de Laplace

A transformada unilateral de Laplace é particularmente útil na análise de sistemas causais, com destaque para os sistemas caracterizados por equações diferenciais lineares de coeficientes constantes e condições iniciais não nulas.

Vimos já que a transformada unilateral de Laplace é

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

onde o limite inferior de integração, 0^- , significa que são incluídos no intervalo de integração impulsos ou singularidades de ordem superior em $t = 0$. A representação da transformada unilateral de Laplace pode fazer-se também na forma de par

$$x(t) \leftrightarrow X(s) = \text{MD} \{x(t)\}$$

Da comparação das transformadas unilateral e bilateral verifica-se que a última depende de todo o sinal, com t a variar de $-\infty$ até $+\infty$, enquanto a primeira apenas depende do sinal entre $t = 0^-$ e $t = +\infty$. Deste modo, dois sinais distintos para $t < 0$ mas iguais para $t \geq 0$ têm transformadas de Laplace bilaterais diferentes mas transformadas de Laplace unilaterais iguais. Também, sinais nulos para $t < 0$ têm transformadas unilaterais e bilaterais iguais. Deste modo, muitos dos conceitos e resultados obtidos para a transformada bilateral podem ser directamente aplicados à transformada unilateral, quando $x(t) = 0$ para $t < 0$.

Aplicando a 4ª propriedade para sinais ‘do lado direito’ vemos que a região de convergência da transformada unilateral é sempre um semi - plano direito. O cálculo da transformada inversa unilateral é idêntico ao da bilateral com a restrição da região de convergência da transformadas unilateral ser um semi - plano direito.

Propriedades da transformada de Laplace unilateral

Muitas das propriedades da transformada unilateral são idênticas às da transformada bilateral. Tal é o caso da linearidade, da translação nos tempos e nos complexos, mudança de escala, conjugação, convolução, diferenciação no complexos e teoremas dos valores inicial e final, que também são válidas para a transformada unilateral. O mesmo não se passa com a diferenciação nos tempos e com a integração que são diferentes em alguns aspectos, dando-lhes uma especial importância para aplicações específicas.

- Diferenciação nos tempos

Seja o sinal $x(t)$ com transformada unilateral de Laplace $X(s)$, então

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

A partir da definição e integrando por partes, vem

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt &= x(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= sX(s) - x(0^-) \end{aligned}$$

uma vez que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-st} = 0$. Analogamente,

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2 X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

Se considerarmos $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]$, podemos fazer

$$\begin{aligned} D \left[\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right] &= sD \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] - \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \\ &= s[sX(s) - x(0^-)] - x'(0^-) \\ &= s^2 X(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \end{aligned}$$

onde $x'(0^-)$ representa a primeira derivada de $x(t)$ em $t = 0^-$. E, também, de uma forma geral

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x'(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$$

onde

$$x^{(r)}(0^-) = \frac{d^r x(t)}{dt^r} \Big|_{t=0^-}$$

Exemplo 21.

Considere o circuito da figura, com $L = 1 \text{ H}$, $R = 1 \Omega$ e $v(t) = 2 \text{ V}$, onde o interruptor desliga a fonte de alimentação no instante $t = 0$, e este se encontrava em regime estacionário em $t < 0$. Obtenha uma expressão para $i(t)$.

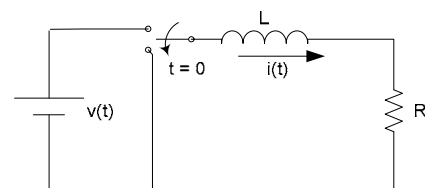


Figura 7. Circuito LR.

A corrente $i(t)$ satisfaz a equação

$$\frac{di(t)}{dt} + i(t) = v(t)$$

onde $v(t) = \begin{cases} 2 & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$. Se obtivermos a transformada unilateral de Laplace da equação do circuito vem

$$sI(s) - i(0^-) + I(s) = 0$$

e

Pelo que

$$i(0^-) = 2/1 = 2$$

e

$$I(s) = \frac{2}{s+1}$$

ou

$$i(t) = 2e^{-t} \quad t > 0$$

$$i(t) = \begin{cases} 2e^{-t} & t > 0 \\ 2 & t \leq 0 \end{cases}$$

- Integração nos tempos

Seja o sinal $x(t)$ com transformada unilateral de Laplace $X(s)$, então

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s}$$

onde $y(0^-) = \int_{-\infty}^0 x(\lambda) d\lambda$. De novo integrando por partes, vem

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right] e^{-st} dt \\ &= \frac{-e^{-st}}{s} \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \Big|_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\lambda) d\lambda + \frac{X(s)}{s} \end{aligned}$$

uma vez que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda = 0$. Também,

$$\int_{0^-}^t x(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

Exemplo 22.

Considere o circuito RLC série da figura, onde o interruptor liga a fonte de alimentação no instante $t = 0$ e o condensador está inicialmente carregado com uma tensão $v_c(0^-)$. Obtenha uma expressão para $i(t)$.

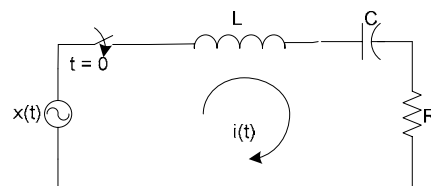


Figura 8. Circuito RLC .

Pela lei de Kirchhoff das malhas a corrente $i(t)$ satisfaz a equação

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = x(t)$$

A equação transformada de Laplace desta equação é

$$LsI(s) - Li(0^-) + RI(s) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{v_c(0^-)}{s} = X(s)$$

No instante inicial sabemos que $i(0^-) = 0$, e

$$v_c(0^-) = \frac{q_c(0^-)}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^-} i(\tau) d\tau$$

Assim,

$$I(s) = \frac{1}{L} \frac{sX(s) - v_c(0^-)}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

Fazendo $2\zeta\omega_n = R/L$ e $\omega_n^2 = (LC)^{-1}$, onde ζ e ω_n são o factor de amortecimento e a frequência natural do circuito, vem

$$I(s) = \frac{2\zeta\omega_n}{R} \frac{sX(s) - v_c(0^-)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

cujos pólos são

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Assim, quando $\zeta > 1$, os pólos são reais e distintos, quando $\zeta = 1$, os pólos são reais e iguais e quando $\zeta < 1$ os pólos são complexos conjugados. Consideremos, por simplicidade, que o sinal de entrada é um degrau unitário, i.e. $X(s) = 1/s$ e que $v_c(0^-) = 0$. Assim,

$$I(s) = \frac{2\zeta\omega_n}{R} \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

a) Seja $\zeta > 1$, i.e. $\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} > 1$, com pólos reais e distintos

$$I(s) = \frac{2\zeta\omega_n}{R} \left(\frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} \right)$$

$$A = \frac{1}{s-s_2} \Big|_{s=s_1} = \frac{1}{s_1-s_2} \text{ e } B = \frac{1}{s-s_1} \Big|_{s=s_2} = \frac{1}{s_2-s_1}, \text{ pelo que}$$

$$I(s) = \frac{2\zeta\omega_n}{R} \left[\frac{1/(s_1-s_2)}{s-s_1} + \frac{1/(s_2-s_1)}{s-s_2} \right]$$

e

$$i(t) = \frac{2\zeta\omega_n}{R} \left[\frac{e^{s_1 t}}{s_1-s_2} + \frac{e^{s_2 t}}{s_2-s_1} \right] u(t)$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{2\zeta\omega_n}{R} \left[\frac{e^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} - e^{\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right] u(t) \\
&= \frac{\zeta}{R\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[e^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} - e^{\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} \right] u(t) \\
&= \frac{e^{\left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right)t} - e^{\left(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right)t}}{\sqrt{R^2 - 4L/C}} u(t)
\end{aligned}$$

b) Seja $\zeta = 1$, i.e. $\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{2}{R}$, com pólos reais e iguais $s_1 = s_2 = -\zeta\omega_n = -\frac{R}{2L}$

$$I(s) = \frac{2\zeta\omega_n}{R} \frac{1}{(s + \zeta\omega_n)^2}$$

e

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{2\zeta\omega_n}{R} t e^{-\zeta\omega_n t} u(t) \\
&= \frac{t e^{-(R/2L)t}}{L} u(t)
\end{aligned}$$

c) Seja $\zeta < 1$, i.e. $\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} < 1$, com pólos complexos conjugados

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{2\zeta\omega_n}{R} \frac{1}{\left[s - \left(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n\right] \left[s - \left(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n\right]} \\
&= \frac{2\zeta\omega_n}{R} \frac{1}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2} \\
I(s) &= \frac{2\zeta}{R\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2}
\end{aligned}$$

e

$$i(t) = \frac{2\zeta}{R\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right) u(t)$$

Exemplo 23.

Para o circuito do exemplo anterior, com $\omega_n^2 = 16$ e $2\zeta\omega_n = 10$, obtenha a tensão na resistência R , quando $v_c(0^-) = -2$ V e $x(t) = (5\text{sent} - \cos t)u(t)$.

Do exemplo anterior temos a transformada de Laplace da corrente de malha

$$I(s) = \frac{2\zeta\omega_n}{R} \frac{sX(s) - v_c(0^-)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

pelo que a transformada de Laplace da tensão em R , com os valores dados e com

$$X(s) = \frac{5}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{-s + 5}{s^2 + 1}$$

vem

$$\begin{aligned} V(s) &= 10 \frac{s \frac{-s+5}{s^2+1} + 2}{s^2 + 10s + 16} \\ &= \frac{10s^2 + 50s + 20}{(s^2 + 1)(s+2)(s+8)} \\ &= \frac{A}{s+j} + \frac{B}{s-j} + \frac{C}{(s+2)} + \frac{D}{(s+8)} \end{aligned}$$

onde

$$A = \left. \frac{10s^2 + 50s + 20}{(s-j)(s+2)(s+8)} \right|_{s=-j} = 1+j$$

$$B = \left. \frac{10s^2 + 50s + 20}{(s+j)(s+2)(s+8)} \right|_{s=+j} = 1-j$$

$$C = \left. \frac{10s^2 + 50s + 20}{(s^2 + 1)(s+8)} \right|_{s=-2} = -\frac{4}{3}$$

$$D = \left. \frac{10s^2 + 50s + 20}{(s^2 + 1)(s+2)} \right|_{s=-8} = -\frac{2}{3}$$

e

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{1+j}{s+j} + \frac{1-j}{s-j} - \frac{4/3}{(s+2)} - \frac{2/3}{(s+8)} \\ &= 2 \frac{s+1}{s^2+1} - \frac{4/3}{(s+2)} - \frac{2/3}{(s+8)} \end{aligned}$$

pelo que

$$v(t) = 2 \left(\cos t + \text{sent} - \frac{2}{3} e^{-2t} - \frac{1}{3} e^{-8t} \right) u(t)$$

Problemas

1. Calcule a transformada de Laplace dos seguintes sinais, representando os seus pólos no plano complexo, assim como a sua ROC:

a) $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-4t}u(t).$

b) $x(t) = e^{2t}u(-t) + e^{-3t}u(t).$

c) $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t).$

d) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t} \cos(3t)u(t).$

e) $x(t) = t[u(t) - e^{-t}u(-t)].$

f) $x(t) = \delta(2t + 6).$

g) $x(t) = e^{-2t}[\delta(t) - 2u(t)].$

h) $x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}.$

i) $x(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t - 5)].$

2. Calcule a função de transferência dos sistemas com resposta impulsional:

a) $h(t) = u(2t + 6).$

b) $h(t) = (e^{-t}/e)u(t + 1).$

3. Seja $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$

a) Quais as possíveis ROC que podem estar associadas a $X(s).$

b) Obtenha a transformada inversa de $X(s).$ em cada um dos casos anteriores.

4. Obtenha a transformada inversa dos seguintes sinais:

a) $X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}, \quad \text{Re}(s) > -1.$

b) $X(s) = \frac{s-1}{s^2+4s+13}, \quad \text{Re}(s) > 0.$

c) $X(s) = \frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)} \quad \text{Re}(s) > -1.$

d) $X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} \quad \text{Re}(s) > 0.$

e) $X(s) = \frac{e^s}{s+1}, \quad \text{Re}(s) > -1.$

f) $X(s) = \frac{2e^{-s}}{s^2+4s+3}, \quad \text{Re}(s) > -1.$

g) $X(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2}, \quad \text{Re}(s) < -1.$

h) $X(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2}, \quad -1 < \text{Re}(s) < 2.$

5. Calcule a transformada unilateral de Laplace de:

a) $u(t).$

b) $\delta(t).$

Aplicações da transformada de Laplace.

Introdução

Vimos já nos exemplos anteriores algumas aplicações da transformada de Laplace ao estudo de circuitos eléctricos. Vamos estudar esta e outras aplicações da transformada de Laplace na análise de SLIT.

Função de transferência

O sinal de saída $y(t)$ de um SLIT com resposta impulsional $h(t)$, quando o sinal de entrada é $x(t)$, é dado por

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Se $Y(s)$, $H(s)$ e $X(s)$ forem as transformadas de Laplace de $y(t)$, $h(t)$ e $x(t)$, respectivamente, então

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

Define-se função de transferência de um SLIT como a razão das transformadas de Laplace dos sinais de saída e de entrada do sistema

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

quando todas as condições de entrada são nulas. Quando $x(t) = \delta(t)$, vem $X(s) = 1$ e $H(s) = Y(s) = \mathcal{D}\{h(t)\}$. Da definição anterior vem que a função de transferência é independente da entrada do sistema e apenas depende deste. Se o SLIT for um circuito eléctrico, então a sua função de transferência é uma função racional de s . Pode obter-se a resposta em frequência de um sistema, a partir da sua função de transferência, fazendo $s = j\omega = j2\pi f$. $H(j\omega)$ é uma função complexa de ω cujos módulo e fase são o módulo e fase da resposta em frequência do sistema.

Exemplo 1.

Considere um SLIT cujo sinal de saída é $y(t) = (-e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$ quando o sinal de entrada for $x(t) = e^{-t}u(t)$. Calcule

- a) a sua função de transferência.
- b) a sua resposta impulsional.

a) As transformadas de Laplace de $x(t)$ e de $y(t)$ são

$$X(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{Re}(s) > -1$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+3} \quad \text{Re}(s) > -1$$

A função de transferência $H(s)$ vem

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+3}}{\frac{1}{s+1}} = \frac{2s}{s+3} \quad \text{Re}(s) > -3$$

b) Para calcular a sua transformada inversa seja

$$H(s) = \frac{2s}{s+3} = \frac{2(s+3)-6}{s+3} = 2 - \frac{6}{s+3} \quad \text{Re}(s) > -3$$

pelo que

$$h(t) = 2\delta(t) - 6e^{-3t}u(t)$$

Função de transferência de SLIT descritos por equações diferenciais lineares de coeficientes constantes

Se considerarmos um SLIT contínuo no tempo, de tal modo que os seus sinais de entrada e de saída, $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente, satisfaçam a seguinte equação

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t)$$

ou

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

onde os coeficientes a_k e b_k são constantes reais. Aplicando a transformada de Laplace à equação anterior e supondo condições iniciais nulas, vem

$$Y(s) \sum_{k=0}^n a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^m b_k s^k$$

onde $Y(s)$ e $X(s)$ são as transformadas de Laplace dos sinais de saída e de entrada, respectivamente, pelo que a função de transferência vem

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

que é uma função racional. Embora a ROC de $H(s)$ não esteja especificada ela pode ser deduzida de considerações sobre o sistema, como a causalidade e a estabilidade.

Exemplo 2.

Considere um SLIT descrito pela equação diferencial $\dot{y} + 2y = x + \dot{x}$. Calcule:

- a sua função de transferência.
- a sua resposta impulsional.

a) A transformada de Laplace da equação é

$$sY(s) + 2Y(s) = X(s) + sX(s)$$

$$(s+2)Y(s) = (s+1)X(s)$$

A função de transferência, $H(s)$, vem

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s+2} = \frac{s+2-1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2}$$

b) A sua transformada inversa, admitindo que o sistema é causal, é

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

Se as condições iniciais não forem nulas, então, aplicando a transformada de Laplace à equação diferencial do sistema, vem

$$\begin{aligned} & a_n [s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}\dot{y}(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)] + \\ & + a_{n-1} [s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - s^{n-3}\dot{y}(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)] + \\ & + a_{n-2} [s^{n-2}Y(s) - s^{n-3}y(0) - s^{n-4}\dot{y}(0) - \dots - y^{(n-3)}(0)] + \dots + \\ & + a_1 [sY(s) - y(0)] + a_0 Y(s) = [b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0]X(s) \end{aligned}$$

onde $y^{(n)}(0) = d^n y / dt^n \big|_{t=0}$ e se considerou que as derivadas de $x(t)$ na origem são

nulas. Assim a equação anterior pode ser resumida como

$$D(s)Y(s) - C(s) = N(s)X(s)$$

e

$$Y(s) = \frac{C(s)}{D(s)} + H(s)X(s)$$

sendo

$$N(s) = \sum_{k=0}^m b_k s^k$$

$$D(s) = \sum_{k=0}^m a_k s^k$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

e

$$C(s) = \sum_{i=1}^n a_i s^{i-1} y(0) + \sum_{i=2}^n a_i s^{i-2} \dot{y}(0) + \dots + [a_n s + a_{n-1}] y^{(n-2)}(0) + a_n y^{(n-1)}(0)$$

A transformada inversa de $Y(s)$ fornece a resposta total do sistema, que inclui a resposta devida às condições iniciais e a resposta ao sinal de entrada designadas, respectivamente de resposta de estado inicial (*rei*) ou resposta de entrada nula e de resposta de estado nulo (*ren*), pois supõe condições iniciais nulas.

$$y_{rei}(t) = D^{-1}[C(s) / D(s)]$$

e

$$y_{ren}(t) = D^{-1}[H(s)X(s)]$$

Exemplo 3.

Considere o circuito RC onde $v_s(t) = 2u(t)$ e $v_c(0^-) = 5V$. Calcule:

- a) a tensão no condensador $v_c(t)$ para $t > 0$.
b) os valores da resposta de estado inicial (*rei*) e da resposta de estado nulo (*ren*).

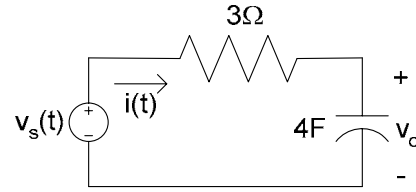


Figura 1. Circuito RC.

- a) Pela equação de Kirchhoff das malhas vem

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t)$$
$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_c(t)}{12} = \frac{2u(t)}{12}$$

e a transformada de Laplace da equação é

$$sV_c(s) - v_c(0^-) + \frac{V_c(s)}{12} = \frac{1}{6s}$$
$$\left(s + \frac{1}{12}\right)V_c(s) = \frac{1}{6s} + 5$$
$$V_c(s) = \frac{1}{6s(s + 1/12)} + \frac{5}{s + 1/12}$$
$$= \frac{2}{s} - \frac{2}{s + 1/12} + \frac{5}{s + 1/12}$$

A tensão no condensador vem

$$v_c(t) = 2(1 - e^{-t/12})u(t) + 5e^{-t/12}$$

- b) A resposta de estado nulo (*ren*), que supõe condições iniciais nulas, é

$$v_c(t)|_{ren} = 2(1 - e^{-t/12})u(t)$$

e a resposta de estado inicial (*rei*), que é a resposta devida, apenas, às condições iniciais, é

$$v_c(t)|_{rei} = 5e^{-t/12}u(t)$$

Causalidade

Um SLIT é causal se $h(t) = 0$ para $t < 0$, o que faz de $h(t)$ um sinal ‘do lado direito’, pelo que $H(s)$ tem uma ROC que é um semi – plano direito, *i.e.*

$$Re(s) > \sigma_{máx}$$

e a parte real de todos os pólos de $H(s)$ é menor ou igual a $\sigma_{máx}$. No entanto, o contrário não é necessariamente verdadeiro. Um sistema cujos pólos de $H(s)$ estão todos à esquerda de $\sigma_{máx}$ pode não ser causal se $H(s)$ não for uma função racional.

Analogamente, um sistema é anti – causal se $h(t) = 0$ para $t > 0$, o que faz de $h(t)$ um sinal ‘do lado esquerdo’, pelo que $H(s)$ tem uma ROC que é um semi – plano esquerdo, *i.e.*

$$\operatorname{Re}(s) < \sigma_{\min}$$

e a parte real de todos os pólos de $H(s)$ é maior ou igual a σ_{\min} . De novo o contrário não é necessariamente verdadeiro. Um sistema cujos pólos de $H(s)$ estão todos à direita de σ_{\min} pode não ser anti – causal se $H(s)$ não for uma função racional.

Exemplo 4.

Considere um SLIT com função de transferência $H(s) = \frac{1}{s+0,2}$, $\operatorname{Re}(s) > -0,2$.

Caracterize este sistema quanto à causalidade.

Como a ROC de $H(s)$ é um semi – plano direito e $H(s)$ é uma função racional, então o sistema é causal, como se pode verificar calculando a transformada inversa

$$h(t) = e^{-0,2t}u(t)$$

Exemplo 5.

Considere um SLIT com função de transferência $H(s) = \frac{e^s}{s+1}$, $\operatorname{Re}(s) > -1$.

Caracterize este sistema quanto à causalidade.

A ROC de $H(s)$ é um semi – plano direito, mas $H(s)$ não é uma função racional pelo que não é possível tirar nenhuma conclusão sendo necessário calcular a transformada inversa

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$$

Este sistema não é causal, dado que $h(t)$ é não nulo no intervalo $-1 < t < 0$.

Estabilidade

Um sistema diz-se assintoticamente estável se a sua resposta de estado inicial se anular $y_{rei}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ sejam quais forem as condições iniciais, designadamente $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-2)}(0), y^{(n-1)}(0)$. Pelo que a resposta do sistema resultante da energia nele armazenada no instante inicial se anula com o tempo.

Um sistema diz-se marginalmente estável se a sua resposta de estado inicial

$$|y_{rei}(t)| \leq M, \quad \forall t \geq 0$$

e sejam quais forem as condições iniciais, sendo M uma constante finita e positiva. Um sistema é instável se a amplitude da sua resposta de estado inicial se tornar ilimitada para alguns valores das condições iniciais.

Se um sistema for assintoticamente estável ou estável internamente também é estável externamente, *i.e.* para uma entrada limitada tem uma saída limitada (*ELSL*), conforme definido no capítulo 2. No entanto, a afirmação inversa não é necessariamente verdadeira.

Um sistema estável externamente, *i.e.* para uma entrada limitada tem uma saída limitada (*ELSL*), tem uma resposta impulsional absolutamente integrável, isto é equivalente à condição de convergência da transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Ora a transformada de Fourier de um sinal é igual à sua transformada de Laplace calculada ao longo do eixo imaginário. Assim, para que um sistema seja estável externamente, *i.e.* para uma entrada limitada tenha uma saída limitada (*ELSL*), é necessário que a ROC da sua função de transferência, $H(s)$, contenha o eixo imaginário.

Um sistema marginalmente estável tem uma resposta impulsional limitada

$$|h(t)| < C, \forall t$$

sendo C uma constante finita e positiva, e $H(s)$ pode ter pólos simples no eixo imaginário. Por $H(s)$ ser uma função racional e por os pólos no eixo imaginário serem simples vem que a ordem do polinómio numerador de $H(s)$ não pode exceder a do polinómio denominador em mais do que uma unidade.

Exemplo 6.

Os sistemas dos exemplos 4 e 5 são estáveis dado que as suas ROC contêm o eixo imaginário.

Diagramas de blocos

A representação de um sistema por diagrama de blocos é muito eficaz, em particular na análise de sistemas complexos. Não só fornece uma representação analítica de cada uma das suas partes como também indica o modo de interligação entre elas, permitindo obter facilmente a função de transferência do sistema.

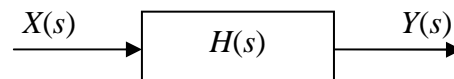


Figura 2. Diagrama de blocos de um sistema.

O modelo elementar de um sistema é o diagrama de blocos da figura 2. $X(s)$ e $Y(s)$ são as transformadas de Laplace dos sinais de entrada e de saída, respectivamente. $H(s)$ é a função de transferência do sistema, que apenas permite ser atravessado por sinais na direcção indicada pelas setas. A relação

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

é válida qualquer que seja a carga ligada ao sistema. No entanto, se forem sentidos efeitos de carga, estes devem ser tomados em conta na representação da função de transferência e a análise posterior será efectuada como se estes efeitos não existissem. A associação mais simples de sistemas é a associação em série como está representado na figura 3.

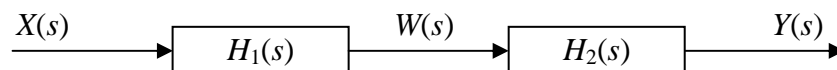


Figura 3. Série de dois blocos.

Neste caso tem-se

$$W(s) = H_1(s)X(s) \quad Y(s) = H_2(s)W(s)$$

e

$$Y(s) = H_1(s)H_2(s)X(s)$$

pelo que

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_1(s)H_2(s)$$

A função de transferência de uma série de blocos é o produto das respectivas funções de transferência. Outra associação de sistemas é a associação em paralelo como está representado na figura 4, onde também é representado o elemento somador.

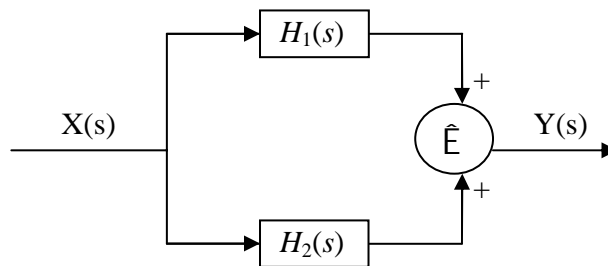


Figura 4. Paralelo de dois blocos.

Neste caso tem-se

$$Y(s) = [H_1(s) + H_2(s)]X(s)$$

pelo que

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

A função de transferência de um paralelo de blocos é a soma das respectivas funções de transferência. Outra associação de sistemas muito útil é a associação com realimentação representada na figura 5.

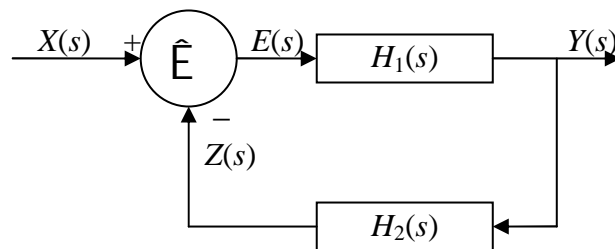


Figura 5. Sistema com realimentação.

As relações que representam este sistema são

$$Y(s) = H_1(s)E(s)$$

$$E(s) = X(s) - Z(s)$$

$$Z(s) = H_2(s)Y(s)$$

pelo que

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) - H_2(s)Y(s)]$$

e

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)}$$

Assim, o sistema com realimentação é equivalente a um único bloco com a função de transferência indicada.

Exemplo 7.

Considere o sistema da figura 6. Obtenha a função de transferência deste sistema para o representar por um bloco único.

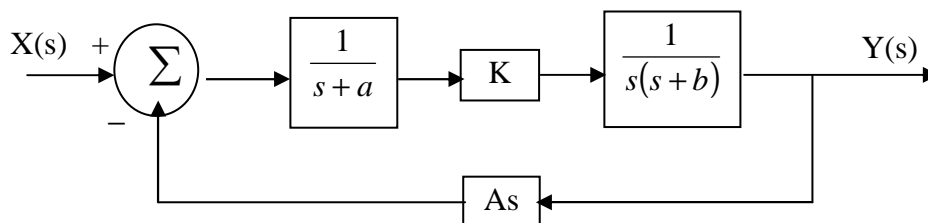


Figura 6. Sistema representado por um diagrama de blocos

Relativamente à figura 5 temos que $H_1(s)$ é constituído por uma série de três elementos sendo

$$H_1(s) = \frac{1}{s+a} \cdot K \cdot \frac{1}{s(s+b)}$$

A função de transferência de todo o sistema vem

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\frac{K}{s(s+a)(s+b)}}{1 + As \frac{K}{s(s+a)(s+b)}} \\ &= \frac{K}{s^3 + (a+b)s^2 + (ab + AK)s} \end{aligned}$$

Resposta em frequência e gráfico de Bode

Vimos já a importância da resposta em frequência de um sistema e da sua representação gráfica. Esta é particularmente importante no estudo de filtros e no controlo de sistemas. A resposta em frequência de um sistema pode obter-se a partir da função de transferência fazendo $s = j\omega$. A sua representação gráfica, em módulo e fase, em função da frequência angular é designada de gráfico de Bode. Nestes gráficos utiliza-se uma escala logarítmica para a frequência ω e a amplitude da resposta em frequência em decibéis, $|H|_{dB} = 20 \log_{10} |H|$. Estas escolhas permitem abranger uma muito maior gama de frequências e, comprimindo a amplitude, tornam mais simples a compreensão do seu funcionamento. Quer para a amplitude, em dB, quer para a fase as escalas são lineares.

Pólos e zeros reais e simples

Consideremos que a função de transferência em estudo tem apenas pólos e zeros reais e simples. No caso mais simples vem

$$H(s) = \frac{k(s + z_1)}{s(s + p_1)}$$

Fazendo $s = j\omega$ vem

$$H(j\omega) = \frac{k(j\omega + z_1)}{j\omega(j\omega + p_1)}$$

Para obter um gráfico de Bode convém modificar esta expressão, sendo

$$H(j\omega) = \frac{kz_1(1 + j\omega/z_1)}{p_1(j\omega)(1 + j\omega/p_1)}$$

seja $K = kz_1 / p_1$, uma constante, e escrevendo $H(j\omega)$ sob forma polar, vem

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{K|1 + j\omega/z_1| \angle \phi_1}{|\omega| \angle 90^\circ |1 + j\omega/p_1| \angle \eta_1} \\ &= \frac{K|1 + j\omega/z_1|}{|\omega| |1 + j\omega/p_1|} \angle (\phi_1 - 90^\circ - \eta_1) \end{aligned}$$

Assim, a resposta em frequência em módulo e fase, vem

$$|H(j\omega)| = \frac{K|1 + j\omega/z_1|}{|\omega| |1 + j\omega/p_1|}$$

$$\theta(\omega) = \phi_1 - 90^\circ - \eta_1$$

onde os ângulos ϕ_1 e η_1 são

$$\phi_1 = \arctg \omega/z_1$$

$$\eta_1 = \arctg \omega/p_1$$

A representação gráfica do módulo pode considerar-se a partir da multiplicação e divisão de factores associados aos pólos e zeros de $H(s)$. Ao converter para dB estas operações transformam-se em adições e subtracções, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} |H|_{dB} &= 20 \log_{10} \frac{K|1 + j\omega/z_1|}{|\omega| |1 + j\omega/p_1|} \\ &= 20 \log_{10} K + 20 \log_{10} |1 + j\omega/z_1| - \\ &\quad - 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} |1 + j\omega/p_1| \end{aligned}$$

O procedimento mais simples para efectuar este gráfico é o de representar separadamente cada parcela e, posteriormente, somar os respectivos gráficos. A representação gráfica dos factores isolados é simples, dado que estes podem ser aproximados por linhas rectas.

O gráfico de $20 \log_{10} K$ é uma recta horizontal por K ser uma constante, sendo o seu valor positivo, nulo ou negativo conforme for $K > 1$, $K = 1$ ou $K < 1$, respectivamente.

O gráfico de $20 \log_{10} |1 + j\omega/z_1|$ é aproximado por duas linhas rectas. Para valores pequenos de ω vem $|1 + j\omega/z_1|$ aproximadamente igual a 1 e para valores elevados de ω vem $|1 + j\omega/z_1|$ aproximadamente igual a ω/z_1 , i.e.

$$20 \log_{10} |1 + j\omega/z_1| \rightarrow 0 \quad \text{quando } \omega \rightarrow 0$$

$$20 \log_{10} |1 + j\omega/z_1| \rightarrow 20 \log_{10} (\omega/z_1) \quad \text{quando } \omega \rightarrow \infty$$

Sendo a escala da frequência logarítmica, então $20\log_{10}(\omega/z_1)$ é uma linha recta com um declive de 20 dB por década[‡]. A intersecção desta recta com o eixo das frequências, *i.e.* com a amplitude de 0 dB ocorre para $\omega = z_1$, que é o ponto de quebra das duas assíntotas desta curva. Então, um zero real e simples é representado em $|H|_{dB}$ por duas linhas rectas, conforme mostra a figura 7.

Figura 7. Aproximação assintótica do módulo da resposta com um zero real e simples

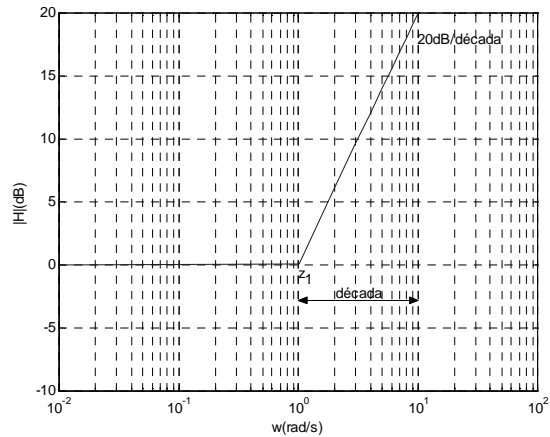


Figura 8. Pólo e zero simples na origem.

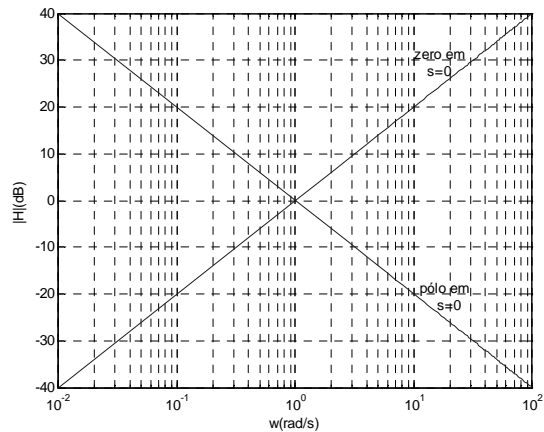
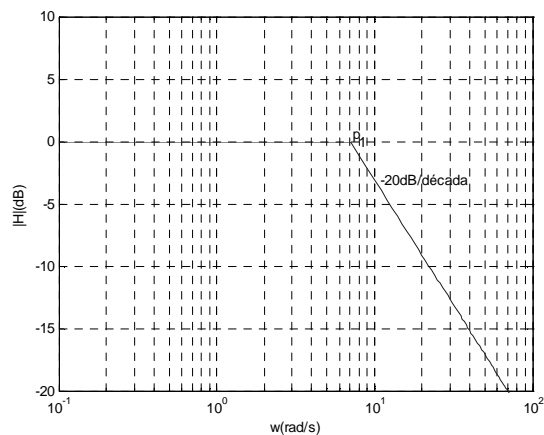


Figura 9. Aproximação assintótica do módulo da resposta com um pólo real e simples



[‡] Uma década é variação da frequência de '1 para 10' ou de '10 para 1'.

O gráfico de $-20\log_{10} \omega$ é uma recta com declive de -20 dB / década que intersecta o eixo da frequência em $\omega = 1$. A figura 8 mostra as rectas correspondentes a um pólo e a um zero simples na origem, com declives de -20 dB / década e de $+20$ dB / década, respectivamente.

O gráfico de $-20\log_{10}|1 + j\omega/p_1|$ é aproximado por duas linhas rectas. Tal como no caso do zero, para valores pequenos de ω vem uma recta horizontal nos 0 dB e, para valores elevados de ω vem a recta $-20\log_{10}(\omega/p_1)$ com um declive de -20 dB por década, sendo o ponto de intersecção das duas rectas $\omega = p_1$. Então, um pólo real e simples é, também, representado em $|H|_{dB}$ por duas linhas rectas, como mostra a figura 9.

Para obter figuras mais rigorosas na vizinhança dos pontos de intersecção das assíntotas pode corrigir-se o seu valor calculando as amplitudes correspondentes aos valores da própria frequência crítica, de metade desta e do seu dobro[§]. Assim, para $\omega = z_1$ ou para $\omega = p_1$ vem

$$\pm 20\log_{10}|1 + j1| = \pm 20\log_{10} \sqrt{2} \approx \pm 3 \text{ dB}$$

Para $\omega = z_1 / 2$ ou para $\omega = p_1 / 2$ vem

$$\pm 20\log_{10}|1 + j1/2| = \pm 20\log_{10} \sqrt{5/4} \approx \pm 1 \text{ dB}$$

E, para $\omega = 2z_1$ ou para $\omega = 2p_1$ vem

$$\pm 20\log_{10}|1 + j2| = \pm 20\log_{10} \sqrt{5} \approx \pm 7 \text{ dB}$$

Onde o sinal $+$ se aplica a um zero simples e o sinal $-$ se aplica a um pólo simples. Enquanto a representação por assíntotas dá 0 dB quer na frequência da sua intersecção e em metade desta, e ± 6 dB no dobro dessa frequência, a curva correcta dá ± 1 dB para metade da frequência crítica, ± 3 dB para a frequência crítica e ± 7 dB para o seu dobro. A figura 10 mostra a comparação entre a representação assintótica e a representação exacta de um zero e de um pólo real e simples.

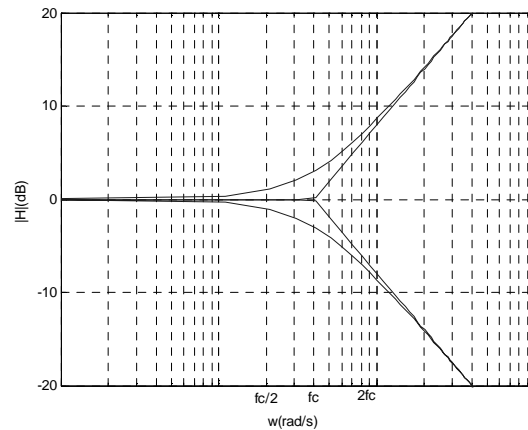


Figura 10. Representação do módulo da resposta com um pólo e um zero reais e simples

Quando os zeros e pólos de $H(s)$ estão bastante distanciados é fácil introduzir estas correcções nas curvas e o seu resultado fidedigno. Quando os zeros e pólos de $H(s)$ estão próximos é difícil introduzi-las, uma vez que vão ocorrer sobreposições dessas correcções.

Por seu lado, para a representação gráfica da fase pode considerar-se uma primeira aproximação por rectas, como no caso do módulo. Assim, o ângulo de fase correspondente à constante K é zero e o ângulo de fase correspondente a um zero ou

[§] A variação para metade ou para o dobro de uma frequência designa-se de uma oitava.

pólo simples na origem é uma constante de $+90^\circ$ ou -90° , respectivamente. Para um zero ou pólo simples fora da origem, para frequências muito menores (pelo menos 10 vezes menores) que a frequência crítica o ângulo de fase é nulo e para frequências muito maiores (pelo menos 10 vezes maiores) que a frequência crítica o ângulo de fase é $+90^\circ$ ou -90° , respectivamente para zeros e pólos. No intervalo entre estas frequências o ângulo de fase é uma linha recta que vai de 0° para um décimo da frequência crítica, passa por $\pm 45^\circ$ para a frequência crítica e atinge os $\pm 90^\circ$ para dez vezes a frequência crítica, sendo o sinal + correspondente a um zero e o sinal - correspondente a um pólo. Na figura 11 faz-se a representação gráfica da resposta em fase de um pólo p e de um zero z ambos reais e simples. A representação gráfica da fase da resposta em frequência obtém-se combinando os gráficos das suas componentes.

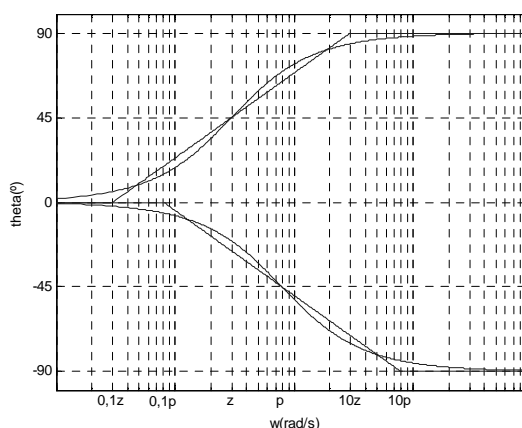


Figura 11. Representação da fase da resposta com um pólo p e um zero z reais e simples

Exemplo 8.

Considere o sistema com função de transferência $H(s) = \frac{1+s}{(1+0,1s)(1+0,01s)}$.

Obtenha o diagrama de Bode deste sistema.

A resposta em frequência de um sistema obtém-se a partir da função de transferência fazendo $s = j\omega$, pelo que

$$H(\omega) = \frac{1+j\omega}{(1+j0,1\omega)(1+j0,01\omega)}$$

Em módulo

$$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|1+j\omega| - 20\log_{10}|1+j0,1\omega| - 20\log_{10}|1+j0,01\omega|$$

Os pontos de quebra das assíntotas desta curva são $\omega = 1$, $\omega = 10$ e $\omega = 100$.

Para $\omega = 1$ vem

$$|H(1)|_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{2} - 20\log_{10}\sqrt{1,01} - 20\log_{10}\sqrt{1,0001} = 2,97 \approx 3 \text{ dB}$$

Para $\omega = 10$ vem

$$|H(10)|_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{101} - 20\log_{10}\sqrt{2} - 20\log_{10}\sqrt{1,01} \approx 17 \text{ dB}$$

Para $\omega = 100$ vem

$$|H(100)|_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{10001} - 20\log_{10}\sqrt{101} - 20\log_{10}\sqrt{2} \approx 17 \text{ dB}$$

Em fase, vem

$$\theta(\omega) = \arctg\omega - \arctg0,1\omega - \arctg0,01\omega$$

Assim,

$$\theta(\omega) \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow 0$$

e

$$\theta(\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \quad \omega \rightarrow \infty$$

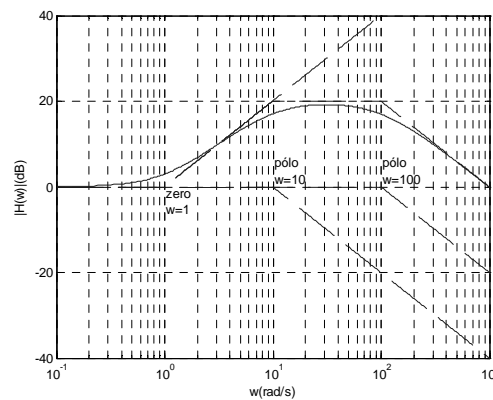
e, nos pontos de quebra,

$$\theta(1) = \arctg 1 - \arctg 0,1 - \arctg 0,01 = 38,7^\circ$$

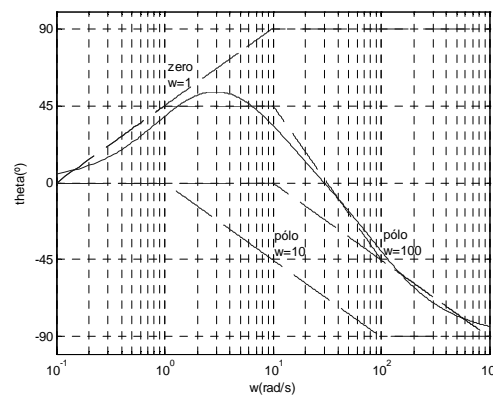
$$\theta(10) = \arctg 10 - \arctg 1 - \arctg 0,1 = 33,6^\circ$$

$$\theta(100) = \arctg 100 - \arctg 10 - \arctg 1 = -39,9^\circ$$

O diagrama de Bode correspondente está representado na figura 12.



a) $|H(\omega)|_{dB}$



b) $\theta(\omega)$

Figura 12. Diagrama de bode do sistema do exemplo 8.

Pólos e zeros complexos

Consideremos um par de pólos complexos conjugados na função de transferência $H(s)$. O primeiro passo será combinar o par conjugado num polinómio de grau dois. Assim, em

$$H(s) = \frac{k}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}$$

faz-se

$$\begin{aligned}(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta) &= (s + \alpha)^2 + \beta^2 \\ &= s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2\end{aligned}$$

ou, sob a forma

$$s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

onde

$$\begin{aligned}\zeta\omega_n &= \alpha \\ \omega_n^2 &= \alpha^2 + \beta^2\end{aligned}$$

O termo ω_n corresponde à intersecção das assíntotas na expressão quadrática e ζ é o coeficiente de amortecimento do termo quadrático. O valor crítico de ζ é 1. Para $\zeta < 1$ as raízes da expressão quadrática são complexas e para $\zeta \geq 1$ as raízes são reais e a expressão vem $(s + p_1)(s + p_2)$, sendo a representação gráfica feita de acordo com o procedimento indicado no ponto anterior. No caso das raízes complexas, com

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

e, tal como anteriormente, dividindo por ω_n^2 , vem

$$H(s) = \frac{k}{\omega_n^2} \frac{1}{1 + (s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n)}$$

ou

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j(2\zeta\omega/\omega_n)} = \frac{K}{1 - u^2 + j2\zeta u}$$

onde $K = k/\omega_n^2$ e $u = \omega/\omega_n$. E, fazendo a representação polar,

$$H(j\omega) = \frac{K}{\left| (1 - u^2) + j2\zeta u \right| \angle \beta_1}$$

vem

$$|H|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{K}{\left| (1 - u^2) + j2\zeta u \right|} = 20 \log_{10} K - 20 \log_{10} \left| (1 - u^2) + j2\zeta u \right|$$

e

$$\theta(\omega) = -\beta_1 = -\arctg \frac{2\zeta u}{1 - u^2}$$

O gráfico de $-20 \log_{10} \left| (1 - u^2) + j2\zeta u \right|$ também pode ser aproximado por duas assíntotas, e, sendo $u = \omega/\omega_n$, também a análise é equivalente em u e em ω . De

$$\begin{aligned}-20 \log_{10} \left| (1 - u^2) + j2\zeta u \right| &= -20 \log_{10} \sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2} \\ &= -10 \log_{10} [u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1]\end{aligned}$$

vem

$$-10 \log_{10} [u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1] \rightarrow 0 \quad \text{quando } u \rightarrow 0$$

$$-10 \log_{10} [u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1] \rightarrow -40 \log_{10} u \quad \text{quando } u \rightarrow \infty$$

Então, as duas assíntotas são, para $\omega < \omega_n$, uma recta horizontal a 0 dB, e, para $\omega > \omega_n$, uma recta com declive de -40 dB / década, e a sua intersecção ocorre em $\omega = \omega_n$.

Obter figuras mais rigorosas na vizinhança dos pontos de intersecção das assíntotas é, neste caso, mais difícil que para pólos simples dado que as correcções dependem do valor do coeficiente de amortecimento ζ . A figura 13 mostra a resposta em amplitude de um sistema com dois pólos complexos conjugados, quer na sua representação assintótica quer na sua representação rigorosa para: i) $\zeta = 0,05$, ii) $\zeta = 0,2$ e iii) $\zeta = 1/\sqrt{2}$.

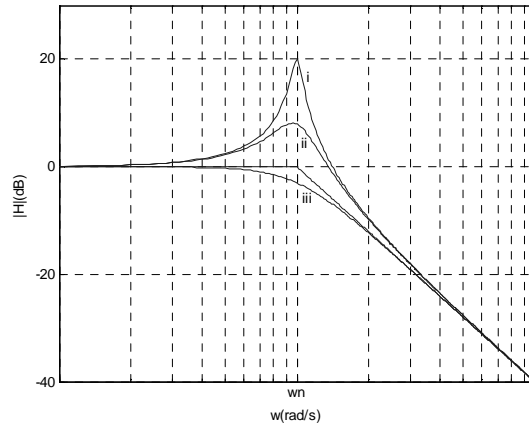


Figura 13. Representação do módulo da resposta com dois pólos complexos conjugados para: i) $\zeta = 0,05$, ii) $\zeta = 0,2$ e iii) $\zeta = 1/\sqrt{2}$.

Para ζ muito pequeno ocorre um pico de amplitude significativa na vizinhança da frequência crítica ω_n , *i.e.* para $u = 1$. Para valores de $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$ os valores corrigidos da amplitude são menores que os valores das suas assíntotas. Para obter a curva exacta vamos calcular o valor da amplitude para a frequência crítica, uma oitava abaixo desta, para a frequência onde ocorre o máximo valor da amplitude, que se designa de frequência de ressonância, e para a frequência a que corresponde uma amplitude nula. Assim,

$$|H(\omega_n/2)|_{dB} = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} (\zeta^2 + 0,75^2)$$

O pico da amplitude, na frequência de ressonância, vale

$$|H(\omega_p)|_{dB} = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} [4\zeta^2(1 - \zeta^2)]$$

e esta é de

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Para a frequência crítica, ω_n , vem

$$|H(\omega_n)|_{dB} = 20 \log_{10} K - 20 \log_{10} 2\zeta$$

E a amplitude corrigida cruza os 0 dB em ω_0 , sendo

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{2(1 - 2\zeta^2)} = \sqrt{2}\omega_p$$

A representação gráfica da fase para um par de pólos complexos conjugados obtém-se de

$$\theta(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta u}{1-u^2}$$

Assim, o ângulo de fase é zero para $\omega = 0$, é de -90° para $\omega = \omega_n$ e aproxima-se de -180° para valores elevados de ω . Também aqui o valor de ζ influencia a forma da curva de fase. Para valores baixos de ζ a variação do ângulo de fase é abrupta na vizinhança de ω_n e para valores mais elevados de ζ a variação do ângulo de fase é mais suave na vizinhança de ω_n . A figura 14 mostra a resposta em fase de um sistema com dois pólos complexos conjugados para: i) $\zeta = 0,05$, ii) $\zeta = 0,2$ e iii) $\zeta = 1/\sqrt{2}$. A aproximação assintótica desta curva obtém-se do calculo da recta tangente em $\omega = \omega_n$, no entanto o erro obtido face à curva verdadeira é significativo, em particular para valores $\omega \neq \omega_n$.

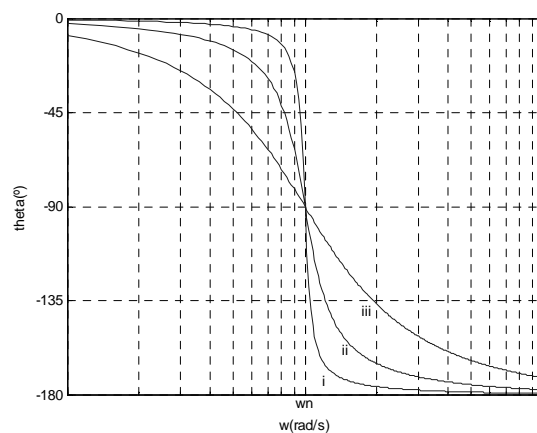


Figura 14. Representação da resposta em fase com dois pólos complexos conjugados para: i) $\zeta = 0,05$, ii) $\zeta = 0,2$ e iii) $\zeta = 1/\sqrt{2}$.

Exemplo 9.

Considere o sistema com função de transferência $H(s) = \frac{0,01s^2}{0,01s^2 + 0,06s + 1}$.

Obtenha o diagrama de Bode deste sistema.

Neste caso, vem

$$\zeta = 0,3$$

$$\omega_n^2 = 100$$

e

$$H(j\omega) = \frac{-0,01\omega^2}{1 - 0,01\omega^2 + j0,06\omega} = \frac{-u^2}{1 - u^2 + j0,6u}$$

com $u = \omega/10$. O módulo vem

$$|H|_{dB} = 40 \log_{10} u - 20 \log_{10} |(1 - u^2) + j0,6u|$$

onde o zero duplo na origem corresponde a uma recta com declive de $+40 \text{ dB / década}$ e o par de pólos conjugados corresponde a duas assíntotas com declives de 0 dB e de -40 dB / década para $\omega > 10$, cuja intersecção ocorre em $\omega = 10$.

Também, para $\omega = 5$, $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \cong 9,055$ e ω_n , vem

$$|H(5)|_{dB} = 40 \log_{10} \frac{1}{2} - 10 \log_{10} (0,3^2 + 0,75^2) \cong -10 \text{ dB}$$

$$|H(\omega_p)|_{dB} = 40 \log_{10} \sqrt{1 - 2 \cdot 0,3^2} - 10 \log_{10} [4 \cdot 0,3^2 (1 - 0,3^2)] = 4,85 - 1,72 \cong 3 \text{ dB}$$

$$|H(\omega_n)|_{dB} = 40 \log_{10} 1 - 20 \log_{10} (2 \cdot 0,3) \cong 4,4 \text{ dB}$$

A fase, vem

$$\theta(\omega) = 180 - \arctg \frac{2 \cdot 0,3\omega}{1 - \omega^2}$$

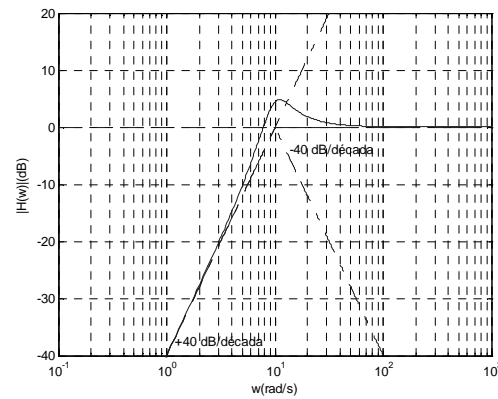
onde o ângulo de fase correspondente a um zero duplo na origem é uma constante de $+180^\circ$. Assim,

$$\theta(\omega) \rightarrow 180 \quad \omega \rightarrow 0$$

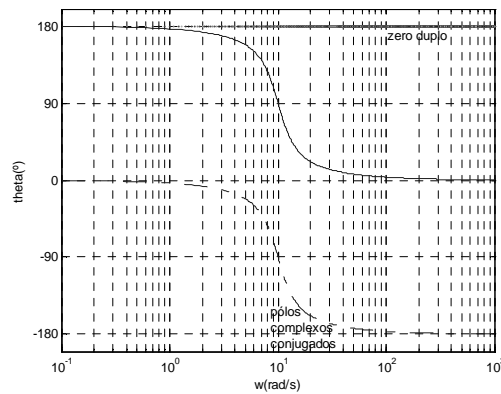
$$\theta(\omega) \rightarrow 90 \quad \omega \rightarrow 10$$

$$\theta(\omega) \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow \infty$$

O diagrama de Bode correspondente está representado na figura 15.



a) $|H(\omega)|_{dB}$



b) $\theta(\omega)$

Figura 15. Diagrama de bode do sistema do exemplo 9.

Análise de circuitos com a transformada de Laplace

Nos estudos de circuitos efectuados nos exemplos 21 e 22, do capítulo anterior, escreveu-se inicialmente uma equação diferencial a partir da lei de Kirchhoff das malhas e obteve-se a equação transformada de Laplace dessa equação. Alternativamente pode escrever-se directamente esta equação transformada de Laplace a partir do desenho de um novo circuito equivalente de Laplace, prescindindo, portanto, de escrever a referida equação diferencial. Para tal vamos obter o circuito equivalente de cada elemento no domínio dos complexos.

Resistência

Pela lei de Ohm, tem-se

$$v(t) = Ri(t)$$

e, sendo R uma constante, a equação transformada de Laplace desta equação é

$$V(s) = RI(s)$$

onde $V(s) = \mathcal{D}\{v(t)\}$ em Volt, $I(s) = \mathcal{D}\{i(t)\}$ em Ampère e R em Ohm (Fig. 16).



Figura 16. Resistência: a) nos tempos e b) nos complexos

Indutância

A indutância é definida pela equação

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

cuja transformada unilateral é

$$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)] = sLI(s) - LI_0$$

A partir desta equação podem obter-se dois modelos de circuito, um modelo série onde o sinal de entrada é a corrente e o sinal de saída é a tensão, e um modelo paralelo onde o sinal de entrada é a tensão e o sinal de saída é a corrente. Em ambos os casos temos dois elementos, no modelo série uma indutância sL e uma fonte de tensão LI_0 , com polaridade inversa da referida em $V(s)$, e no modelo paralelo uma indutância sL e uma fonte de corrente I_0/s , como mostra a figura 17.

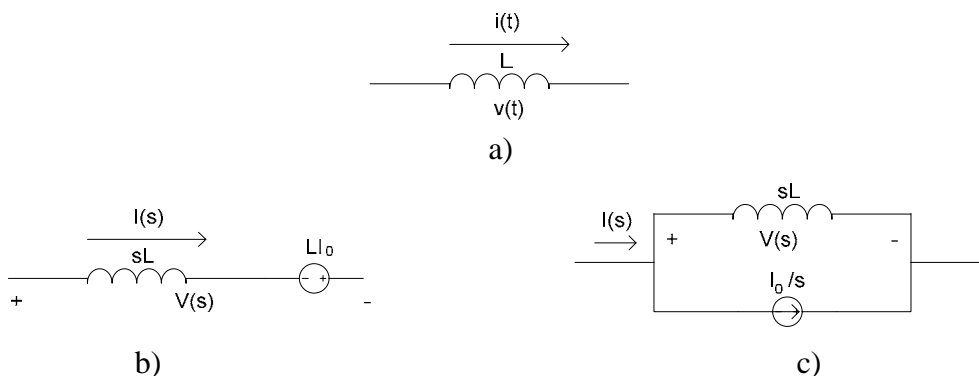


Figura 17. Indutância: a) nos tempos e nos complexos:
b) modelo série e c) modelo paralelo.

No modelo paralelo, a corrente é

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{I_0}{s}$$

Quando não há energia previamente armazenada no circuito, *i.e.* as condições iniciais são nulas, então o modelo de Laplace é apenas uma indutância sL .

Capacidade

A capacidade é definida pela equação

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

cuja transformada unilateral é

$$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)] = sCV(s) - CV_0$$

A partir desta equação podem obter-se, também, dois modelos de circuito, um modelo série onde o sinal de entrada é a corrente e o sinal de saída é a tensão, e um modelo paralelo onde o sinal de entrada é a tensão e o sinal de saída é a corrente. Em ambos os casos temos dois elementos, no modelo série uma capacidade sC e uma fonte de tensão V_0/s , com a mesma polaridade de $V(s)$, e no modelo paralelo uma capacidade sC e uma fonte de corrente CV_0 , como mostra a figura 18.

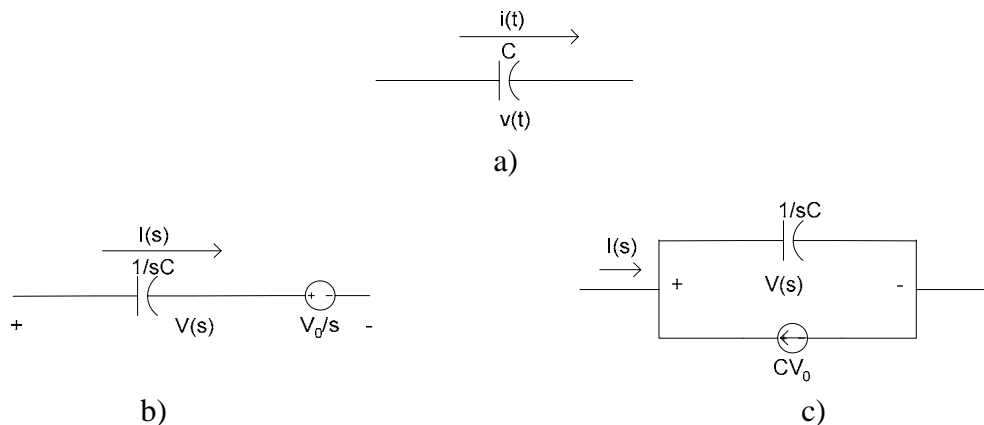


Figura 18. Capacidade: a) nos tempos e nos complexos:
b) modelo série e c) modelo paralelo.

No modelo série, a tensão é

$$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{s}$$

Quando não há energia previamente armazenada no circuito, *i.e.* as condições iniciais são nulas, então o modelo de Laplace é apenas uma capacidade sC . Retomemos o circuito do exemplo 23 do capítulo anterior.

Exemplo 10.

Considere o circuito RLC série da figura 19, com $\omega_n^2 = 16$ e $2\zeta\omega_n = 10$, obtenha a tensão na resistência R , quando $v_c(0^-) = -2$ V e $x(t) = (5\sin t - \cos t)u(t)$.

A transformada de Laplace do sinal de entrada é

$$X(s) = \frac{5}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{-s + 5}{s^2 + 1}$$

As condições iniciais são $i_L(0^-) = 0$ A e $v_C(0^-) = -2$ V.

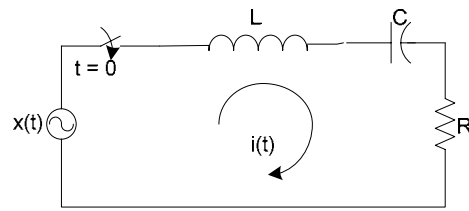


Figura 19. Circuito *RLC*.

Também se tem $\omega_n^2 = \frac{1}{LC} = 16 \text{ s}^{-2}$ e $2\zeta\omega_n = \frac{R}{L} = 10 \text{ s}^{-1}$.

Para representar o circuito equivalente de Laplace (Fig. 20), e, portanto, obter valores para L e C , consideremos $R = 1 \Omega$, assim tensão e corrente têm o mesmo valor numérico. A indutância vem $L = 0,1$ H e a capacidade vem $C = 0,625$ F e, pela lei de Kirchhoff das malhas, vem

$$\frac{-s + 5}{s^2 + 1} = \left(0,1s + \frac{1}{0,625s} + 1 \right) I(s) - \frac{2}{s}$$

Resolvendo em ordem à corrente vem

$$I(s) = \frac{(-s + 5)/(s^2 + 1) + 2/s}{\left(0,1s + \frac{1}{0,625s} + 1 \right)}$$

ou

$$V(s) = I(s) = \frac{10s^2 + 50s + 20}{(s^2 + 1)(s^2 + 10s + 16)}$$

analogamente ao exemplo 23, onde está calculada a transformada inversa.

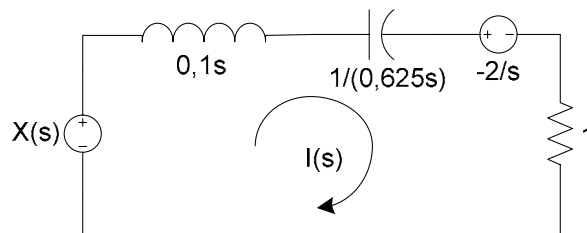


Figura 20. Circuito equivalente de Laplace

Indutância mútua

Para circuitos com indutância mútua, M , é necessário obter um circuito equivalente que torne a análise do circuito total mais fácil. O processo de determinação da polaridade relativa das tensões de indutância mútua através de considerações sobre o núcleo e sobre o sentido do enrolamento não é prático. Assim, na representação de circuitos acoplados as bobinas são marcadas com pontos, que são assinalados nos terminais de igual polaridade (Fig. 21). Para determinar o sinal da tensão de indutância mútua aplica-se a seguinte regra:

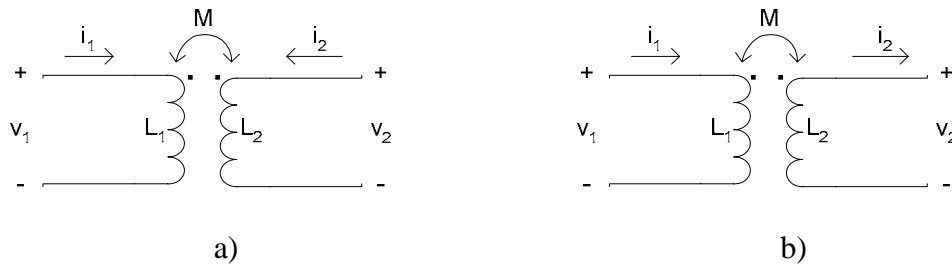


Figura 21. Indutância mútua: a) positiva, b) negativa.

- Quando as duas correntes entram (ou saem) do par de indutâncias acopladas nos terminais com ponto, então os sinais dos termos M são iguais aos sinais dos termos L , aqui designados de auto indutâncias.
- Quando as duas correntes têm sentidos opostos no par de indutâncias acopladas nos terminais com ponto, então os sinais dos termos M são opostos aos sinais dos termos L

De um modo geral as equações dos circuitos da figura 21, com M positivo em a) e negativo em b), são

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

ou, alternativamente,

$$v_1 = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt}$$

o que sugere um circuito equivalente em T como mostra a figura 22.

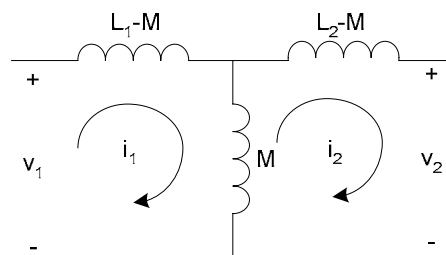


Figura 22. Circuito equivalente em T

A análise de um circuito com um transformador requer a sua substituição por um circuito em T e posterior estudo com base nas ferramentas convencionais para circuitos *RLC*.

Exemplo 11.

Considere o circuito da figura 23 e admita que o interruptor se encontra na posição *a*, em regime permanente para $t < 0$, e em $t = 0$ muda para a posição *b*. Determine a corrente i_2 em função do tempo.

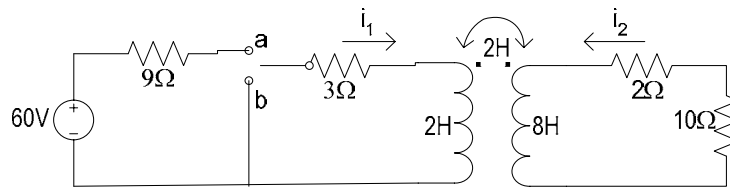
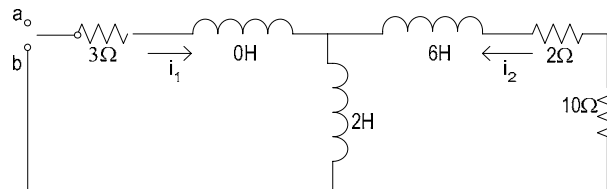
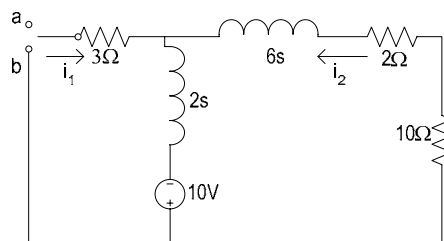


Figura 23. Circuito com transformador.

Em primeiro lugar substitui-se o transformador pelo seu equivalente em T, e posteriormente representa-se o circuito equivalente de Laplace, na figura 24 a) e b), respectivamente.



a)



b)

Figura 24. Circuito equivalente: a) com T, b) de Laplace.

As condições iniciais correspondentes são

$$\begin{aligned} i_1(0^-) &= 60/12 = 5 \text{ A} \\ i_2(0^-) &= 0 \text{ A} \end{aligned}$$

O circuito equivalente de Laplace mais conveniente para aplicar a lei de Kirchhoff das malhas usa o modelo série da indutância e as equações correspondentes são

$$\begin{aligned} (3 + 2s)I_1(s) + 2sI_2(s) &= 10 \\ 2sI_1(s) + (12 + 8s)I_2(s) &= 10 \end{aligned}$$

e a corrente $I_2(s)$ vem

$$I_2(s) = \frac{2,5}{s^2 + 4s + 3} = \frac{2,5}{(s+1)(s+3)} = \frac{1,25}{s+1} - \frac{1,25}{s+3}$$

pelo que

$$i_2(t) = 1,25(e^{-t} - e^{-3t})u(t) \text{ A}$$

Problemas

1. Considere um sistema contínuo, linear e invariante no tempo, que, para o sinal de entrada $x(t) = u(t)$, apresenta à saída o sinal $y(t) = 2e^{-3t}u(t)$. Obtenha a resposta impulsional do sistema, $h(t)$.

2. O sistema contínuo linear e invariante no tempo, com resposta impulsional $h(t) = e^{-2t}u(t)$ tem à entrada o sinal $x(t) = e^{-t}u(t)$. Obtenha o sinal de saída $y(t)$.

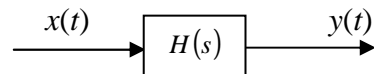
3. Obtenha a função de transferência de um sistema em relação ao qual sabe que é causal; que $H(s)$ é uma função racional com dois pólos em $s = -2$ e $s = 4$; que para $x(t) = 1$ vem $y(t) = 0$ e que $h(0^+) = 4$.

4. Considere o sistema com resposta impulsional $h(t) = e^{-|t|}$. Obtenha $H(s)$ e caracterize o sistema.

5. Um sistema linear e invariante no tempo tem à entrada o sinal $x(t) = e^{-3t}u(t)$ e à saída o sinal $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$. Obtenha $H(s)$ e caracterize o sistema.

6. Considere o sistema com $h(t) = e^{2t}u(t)$. Obtenha $H(s)$ e caracterize o sistema.

7. Considere o sistema da figura com função de transferência $H(s) = 1 - \frac{1}{s+1}$, $\text{Re}(s) > -1$ e com sinal



de entrada $x(t) = e^{-t}u(t)$

a) Calcule o sinal de saída deste sistema, $y(t)$.

b) Caracterize o sistema.

8. Considere o sistema com função de transferência é $H(s) = \frac{1}{s+1}$, $\text{Re}(s) > -1$ onde o sinal de entrada é $x(t) = e^{-t}u(t)$.

a) Calcule o sinal de saída deste sistema, $y(t)$.

b) Caracterize este sistema.

9. Considere um sistema contínuo com a função de transferência $H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$.

- a) Indique e represente os pólos e zeros deste sistema.
 b) Obtenha uma equação diferencial linear de coeficientes constantes que faça a descrição do sistema.

10. Considere um sistema contínuo linear e invariante no tempo de tal modo que o sinal de entrada $x(t)$ e o sinal de saída $y(t)$ satisfazem a equação diferencial linear de coeficientes constantes $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 3x$. Obtenha a resposta impulsional do sistema, $h(t)$, supondo que este é estável.

11. Considere um sistema contínuo linear e invariante no tempo de tal modo que o sinal de entrada $x(t)$ e o sinal de saída $y(t)$ satisfazem a equação diferencial linear de coeficientes constantes $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{x} + 3x$. Determine a resposta impulsional do sistema, $h(t)$, supondo que este é estável.

12. Considere o sistema descrito pela equação diferencial linear $\dot{y} + 4y = x$. Admita que $y(0) = 3$ e que o sinal de entrada é $x(t) = 2e^{-2t}u(t)$. Obtenha o sinal $y(t)$.

13. Resolva a seguinte equação diferencial $\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = x$, sabendo que $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$ e $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

14. Caracterize os sistemas quanto à causalidade e estabilidade:

- a) $X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}$, $Re(s) > -1$. b) $X(s) = \frac{s-1}{s^2+4s+13}$, $Re(s) > 0$.
 c) $X(s) = \frac{e^s}{s-1}$, $Re(s) > 1$. d) $X(s) = \frac{2e^{-s}}{s^2+4s+3}$, $Re(s) > -1$.
 e) $X(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2}$, $Re(s) < -1$. f) $X(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2}$, $-1 < Re(s) < 2$.

15. Considere a associação de dois elementos, conforme indicado na figura P1, sendo $H_1(s) = 1/(s+1)$ e $H_2(s) = 2$. Obtenha a função de transferência do sistema indicando os seus pólos e zeros e representando-os no plano complexo.

16. Considere o sistema constituído pela associação de dois elementos, conforme indicado na figura P1, sendo

$$H_1(s) = \frac{3}{s(s+3)}, \quad H_2(s) = 2s.$$

- a) Indique e represente os pólos e zeros deste sistema.
 b) Obtenha uma equação diferencial linear de coeficientes constantes que faça a descrição do sistema.

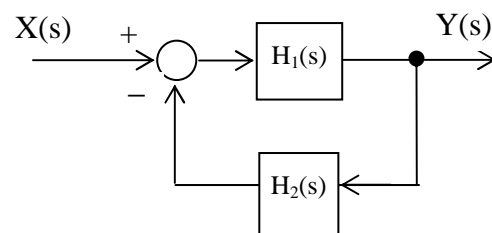


Figura P1. Sistema com realimentação.

17. Considere o sistema constituído pela associação de dois elementos, conforme indicado na figura P1, sendo $H_1(s) = \frac{s}{(s+1)(s+a)}$, $H_2(s) = \frac{b}{s}$ e a função de transferência total do sistema $H(s) = \frac{s}{(s+4)(s+5)}$.

- Calcule os valores de a e de b .
- Obtenha uma equação diferencial linear de coeficientes constantes que descreva o sistema.

18. Considere o sistema constituído pela associação de dois elementos, conforme indicado na figura P1, sendo $H_1(s) = 1/(s+2)$ e $H_2(s) = 1/s$. Obtenha:

- As frequências críticas do sistema.
- Uma equação diferencial linear de coeficientes constantes que descreva o sistema.

19. Considere o sistema indicado na figura P2, onde $H_1(s) = 1/(s+1)$.

- Calcule a função de transferência do sistema, indicando as suas frequências críticas.
- Obtenha uma equação diferencial linear de coeficientes constantes que descreva o sistema.

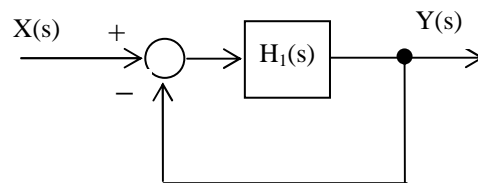


Figura P2. Sistema com realimentação.

20. Considere o sistema causal da figura P2 cuja função de transferência é dada por $H(s) = Y(s)/X(s) = (s^2 + 2s + 1)^{-1}$.

- Obtenha uma equação diferencial linear de coeficientes constantes que descreva este sistema.
- Calcule a função de transferência $H_1(s)$, indicando as suas frequências críticas

21. Considere o sistema, da figura P3, constituído pela associação de três elementos com $H_1(s) = 1/(s+2)$, $H_2(s) = 1/s$ e $H_3(s) = 1/s$. Obtenha:

- a função de transferência do sistema, $H(s)$, indicando as suas frequências críticas.
- uma equação diferencial linear de coeficientes constantes que faça a sua descrição.

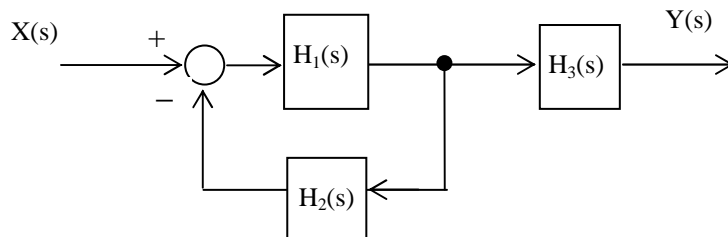


Figura P3. Sistema composto.

22. Considere o sistema, da figura P3, constituído pela associação de três elementos, sendo $H_1(s) = s$, $H_2(s) = 1/[s(s+2)]$ e $H_3(s) = 1/[s(s+1)]$. Determine:

- a função de transferência do sistema, $H(s)$, indicando as suas frequências críticas.
- uma equação diferencial linear de coeficientes constantes que faça a sua descrição.

23. Considere o sistema da figura P4, constituído pela associação de três elementos, sendo $H_1(s) = s$, $H_2(s) = 1/[s(s+2)]$ e $H_3(s) = 1/(s+1)$. Obtenha a função de transferência do sistema indicando os seus pólos e zeros e representando-os no plano complexo.

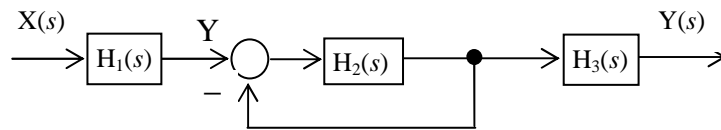


Figura P4. Sistema composto.

24. Obtenha $H(s)$ e $h(t)$ para o circuito da figura P5.

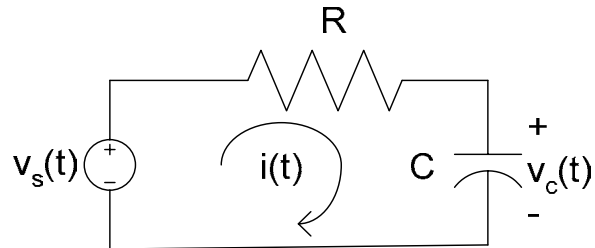


Figura P5. Circuito do problema 24.

25. Considere o circuito da figura P6. Admita que, no instante $t = 0$, em que se fecha o interruptor, o condensador está carregado com uma tensão igual a v_0 . Obtenha uma expressão para a tensão de saída $v_c(t)$.

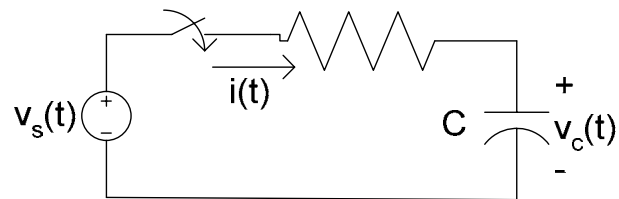


Figura P6. Circuito do problema 25.

26. Considere o circuito da figura P7 onde as condições iniciais são $v_c(0^-)$ e $i_L(0^-)$.

Desenhe o circuito equivalente de Laplace conveniente à aplicação da lei das malhas de Kirchhoff e escreva as respectivas equações.

021-28jan03

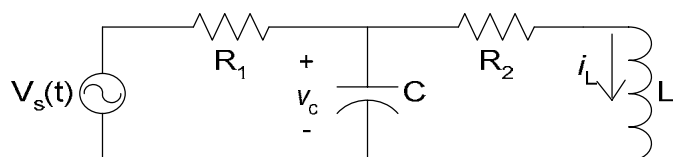


Figura P7. Circuito do problema 26.